日本放射線技術学会　中国・四国部会
画像情報研究会
平成26年7月6日　岡山大学

逐次近似法の基礎と圧縮センシングによる少数投影からの画像再構成

首都大学東京　篠原広行

内容

1) フィルタ補正逆投影法（FBP法）
2) 代数的逐次近似法
3) 最小二乗法と特異値分解
4) 最小二乗法の逐次近似解
5) 統計的逐次近似法
6) L_1ノルムと全変動（Total Variation: TV）
7) 圧縮センシングによる画像再構成

プログラム開発

C言語開発環境　Microsoft Visual Studio 2010 C++

Windows Vista, CPU Core 2 DUO, 4 GBメモリ

画像表示ソフトウエア　Display 058

開発者　横浜創英大学　橋本雄幸教授

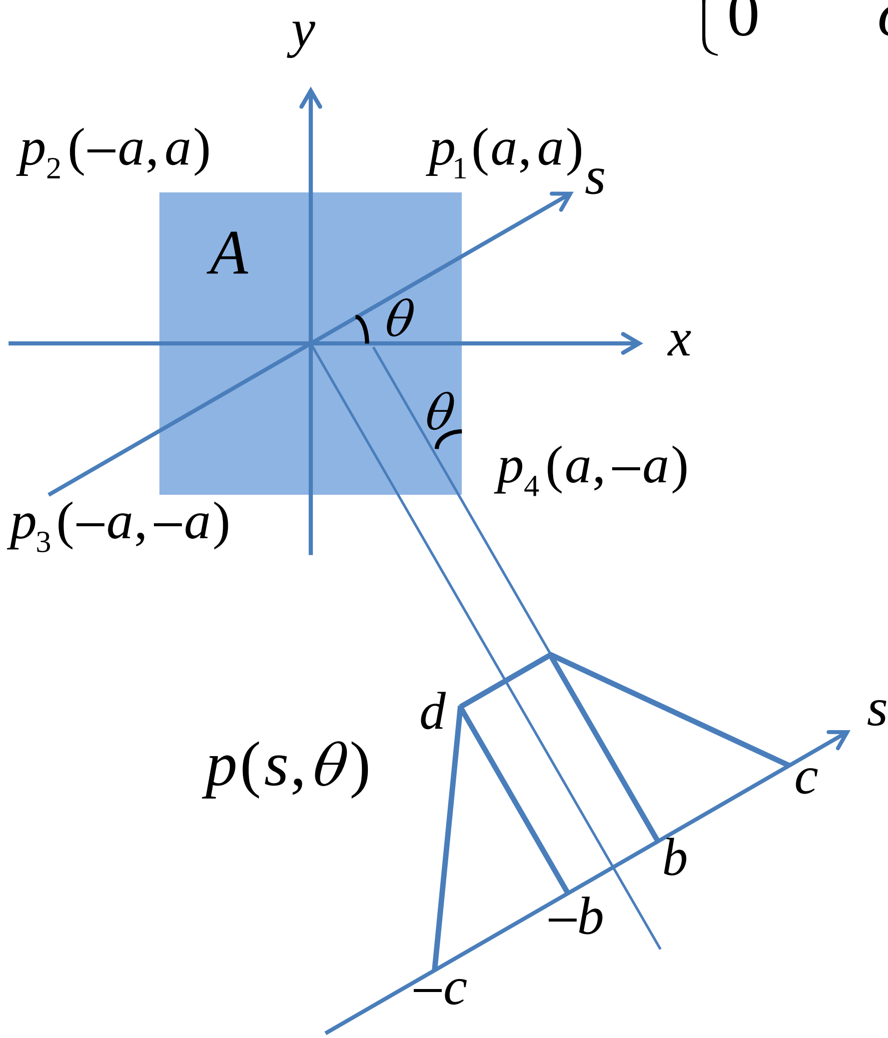
小数点付きの実数画像を扱える．各種画像処理，画像再構成を行える．

研究・教育用に幅広く応用可能なソフトウエア．

1) フィルタ補正逆投影法（FBP法）

投影

$$f(x,y)=\begin{cases} A & |x|\le a, |y|\le a \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

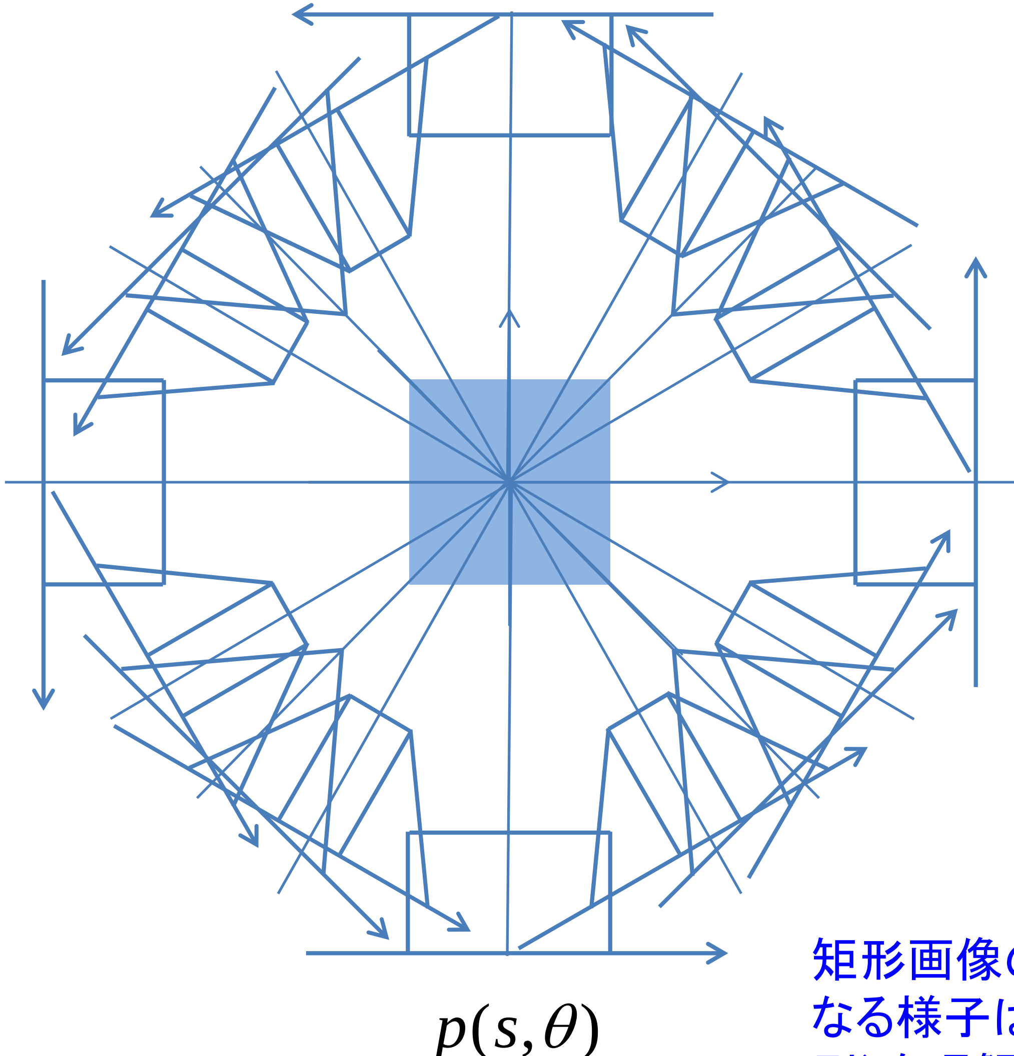


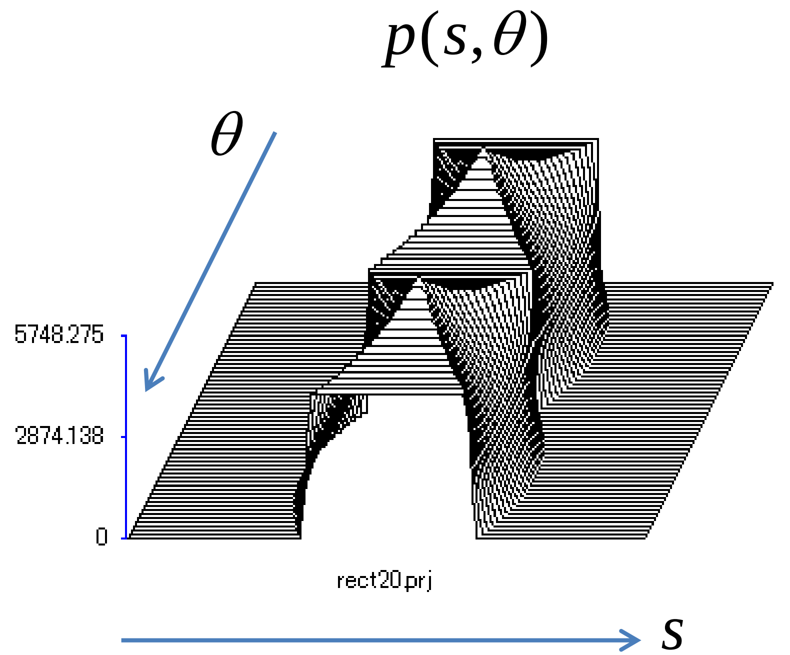
$$c = a\cos\theta + a\sin\theta$$

$$b = a\cos\theta - a\sin\theta$$

$$d = 2aA/\cos\theta$$

投影の収集

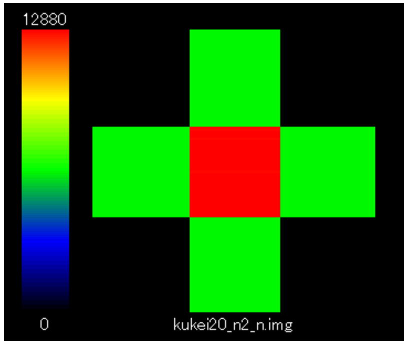


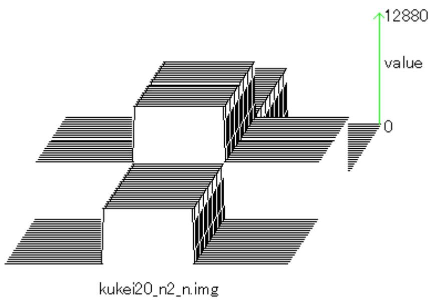


矩形画像の投影が矩形，台形，二等辺三角形となる様子は，逐次近似法の係数行列（システム行列）を理解する上でも重要．

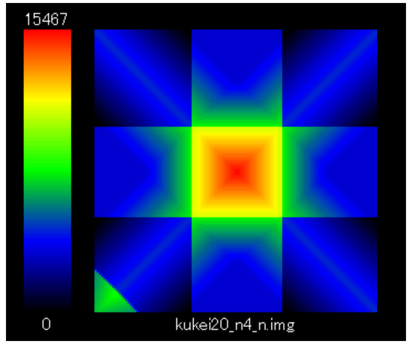
逆投影(Back Projection: BP)

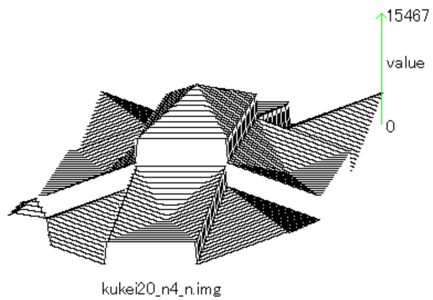
2方向



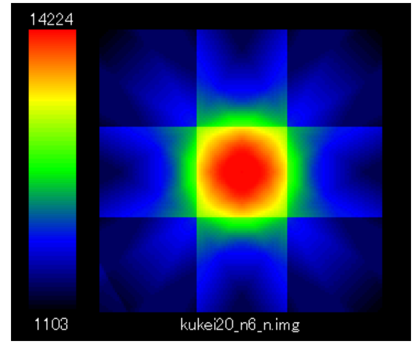


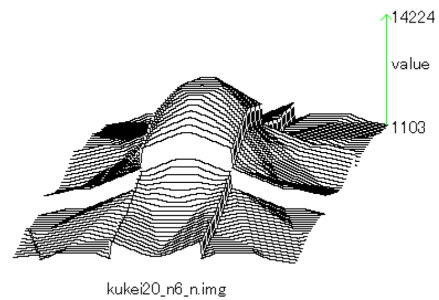
4方向



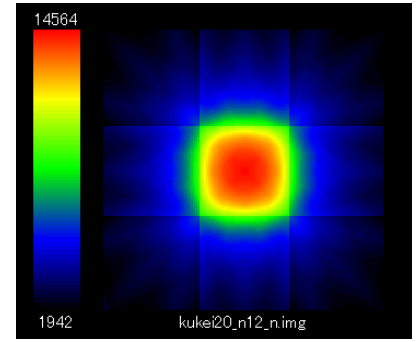


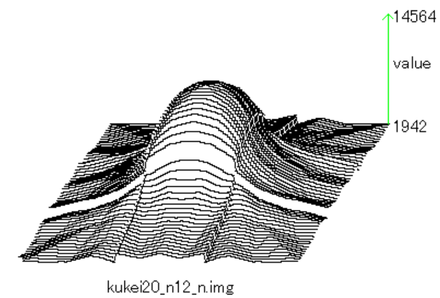
6方向



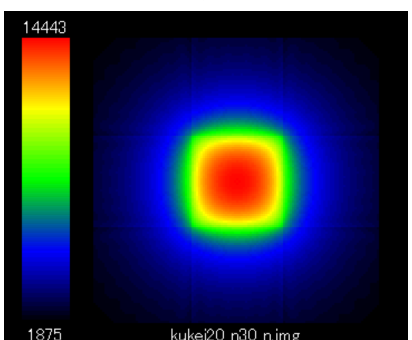


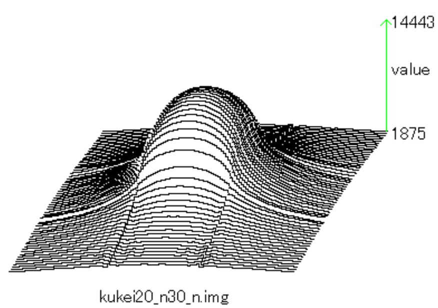
12方向



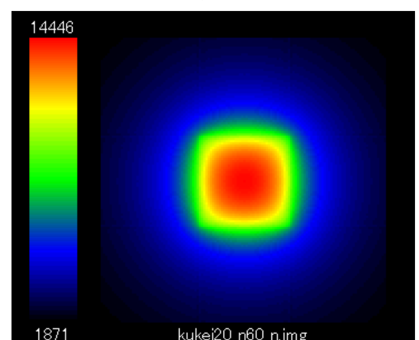


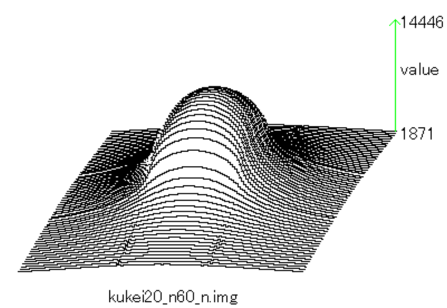
30方向





60方向





フィルタ補正逆投影法(FBP法)

逆投影の点広がり関数　PSF　$h(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{r}$

PSFの2次元フーリエ変換

$$H(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}dxdy=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{1}{k}$$

Rampフィルタ補正と逆投影

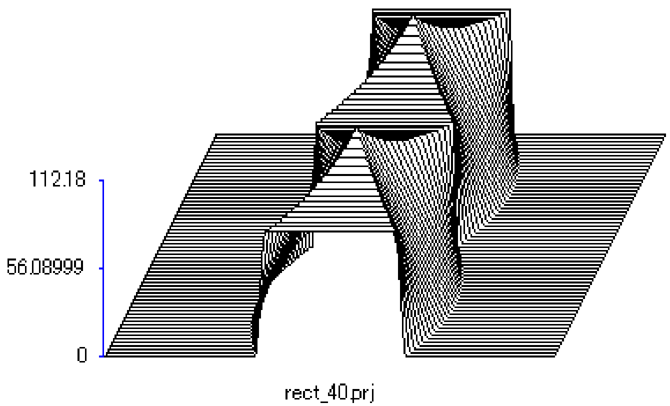
$$f(x,y)=\int_0^{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}P(k,\theta)|k|e^{i2\pi ks}dk\right\}d\theta$$

Ram−Lak フィルタ

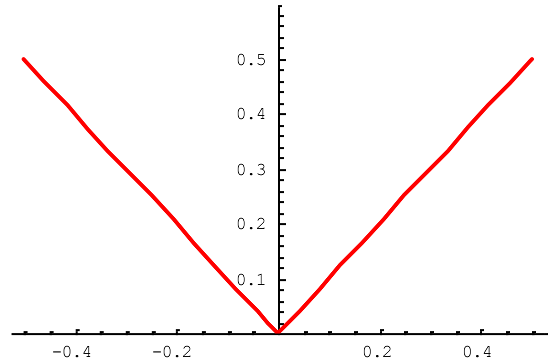
$$h(ma)=\begin{cases}1/4a^2 & m=0\\ -1/(\pi ma)^2 & m:odd\\ 0 & m:even\end{cases}$$

フィルタ補正逆投影法（FBP法）

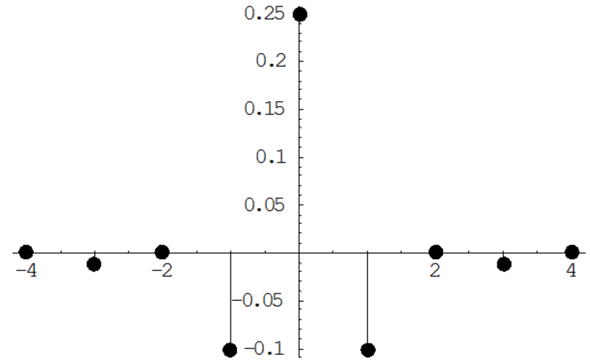
(a) 投影　$p(s,\theta)$



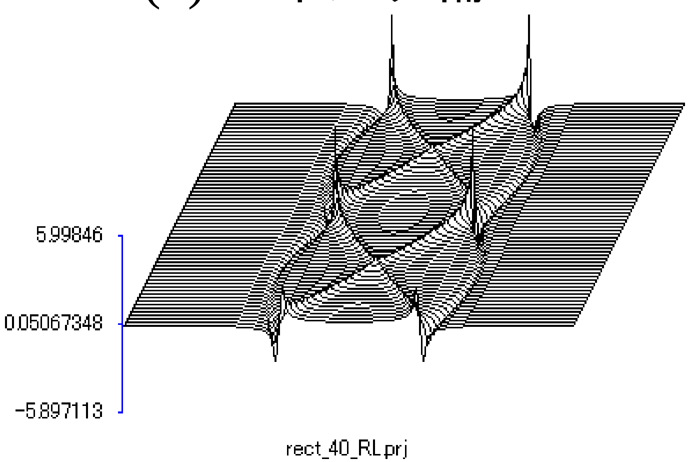
(b) Rampフィルタ



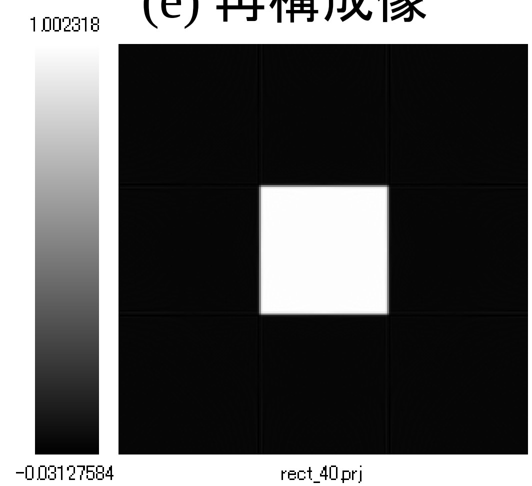
(c) Ram-Lak フィルタ



(d) フィルタ補正

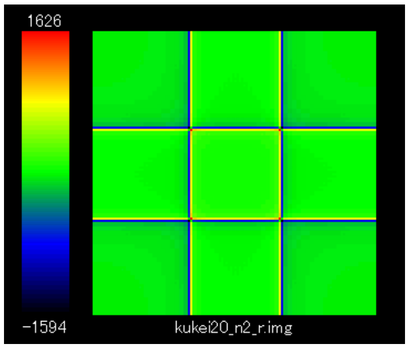


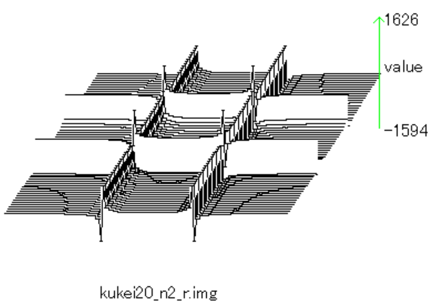
(e) 再構成像



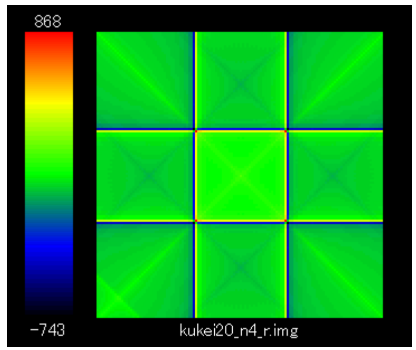
フィルタ補正逆投影法(FBP法)

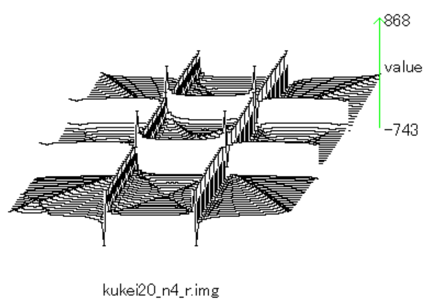
2方向



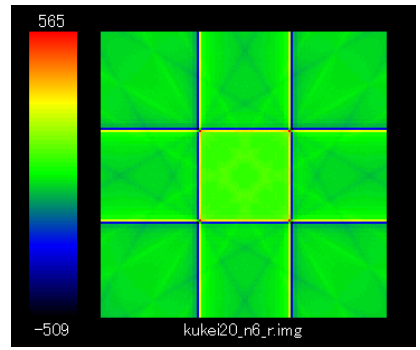


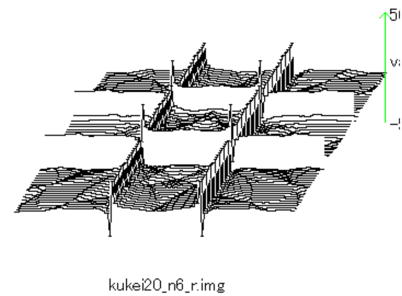
4方向



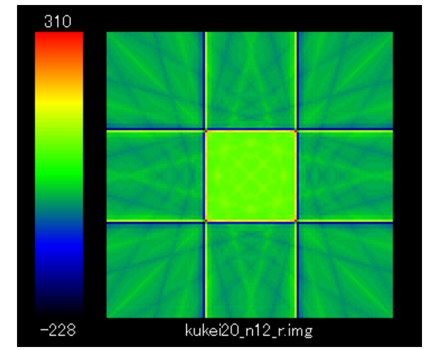


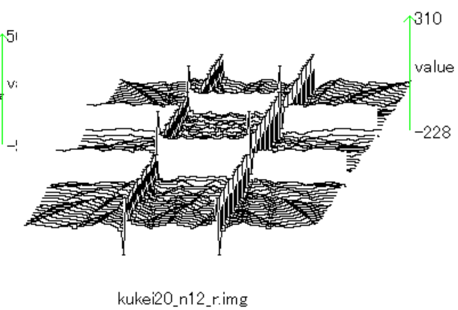
6方向



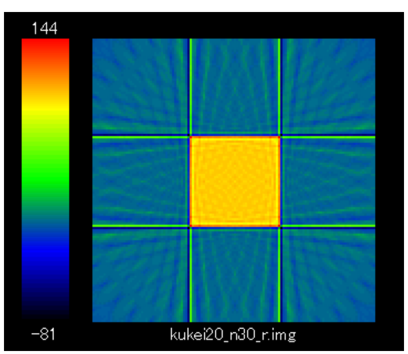


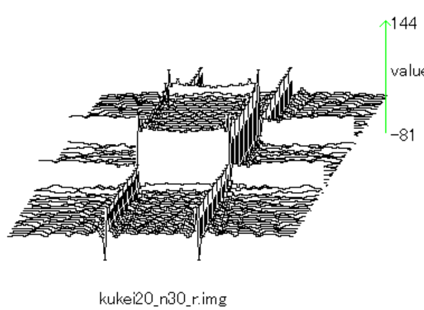
12方向



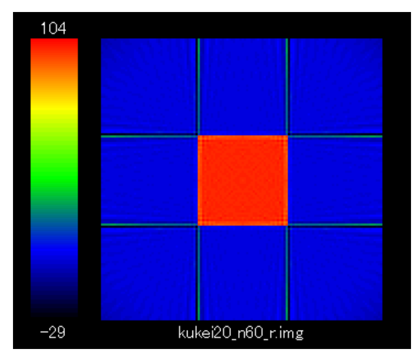


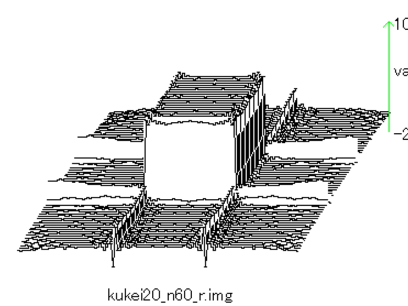
30方向



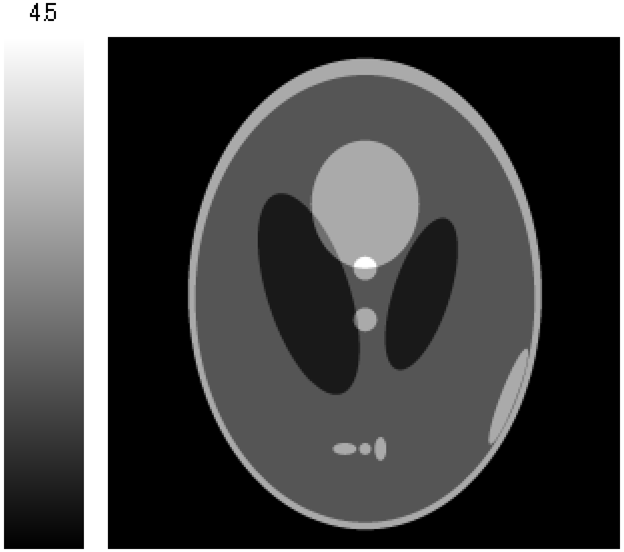


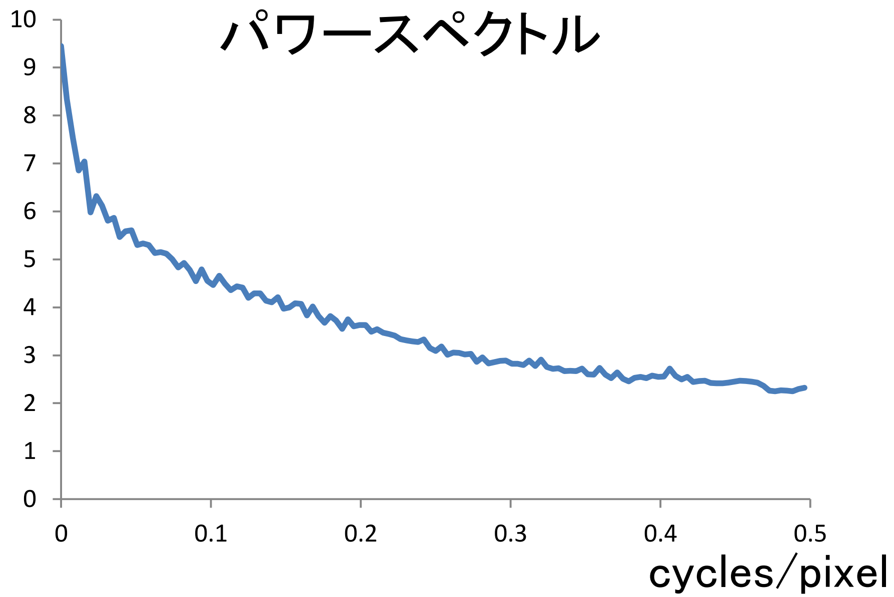
60方向

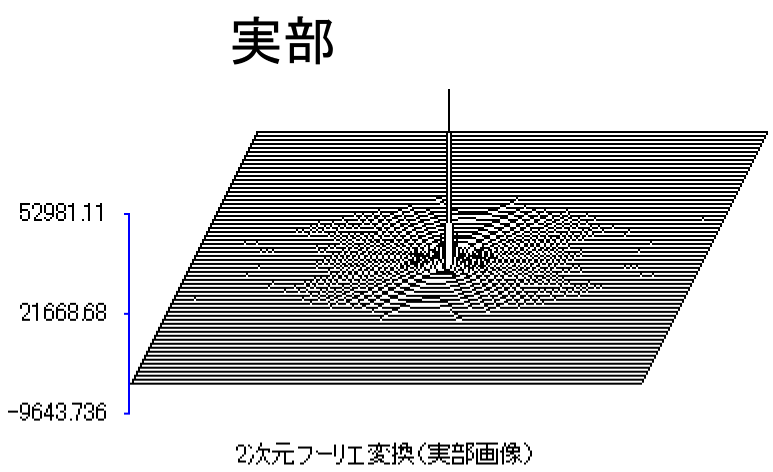


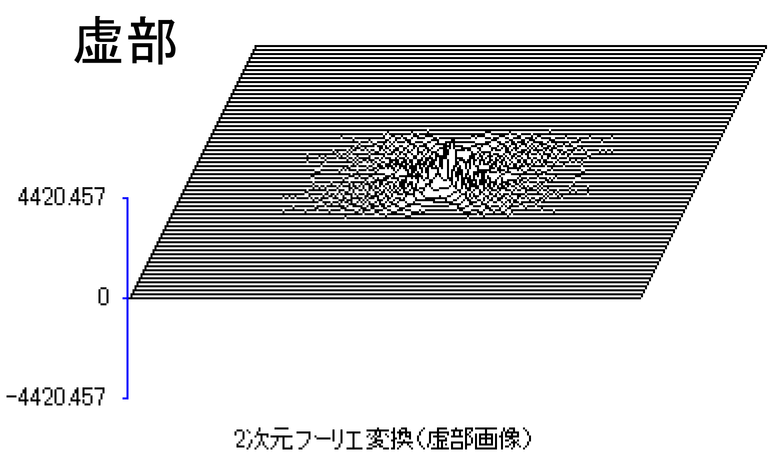


Shepp-Loganファントムの周波数成分









Hanning 関数

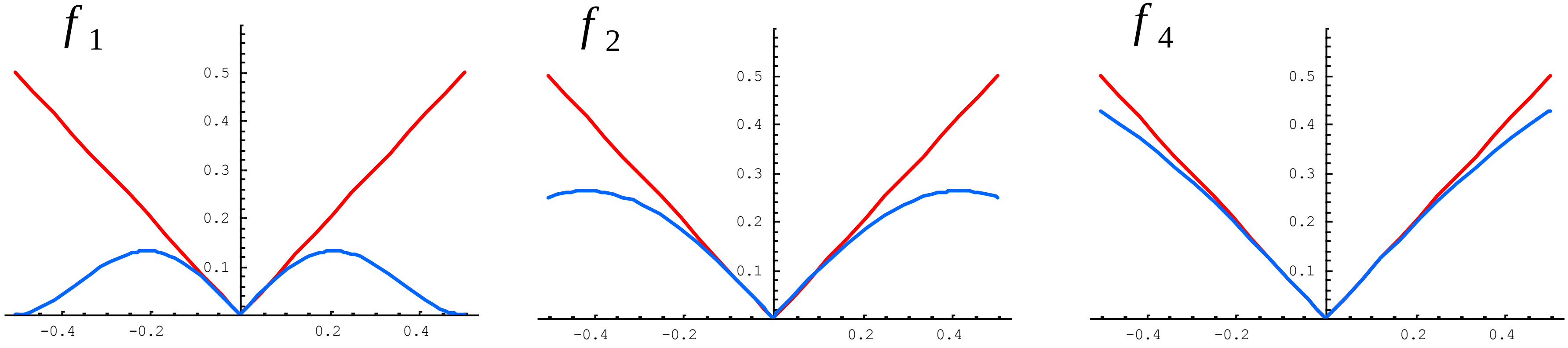
$$W(k) = 0.5 + 0.5\cos(k\pi / k_m)$$

k_m ナイキスト周波数
0.5 cycles/pixel

$$\begin{cases} f_4 & W_4(k) = 0.5 + 0.5\cos(k\pi / 4k_m) \\ f_2 & W_2(k) = 0.5 + 0.5\cos(k\pi / 2k_m) \\ f_1 & W_1(k) = 0.5 + 0.5\cos(k\pi / k_m) \\ f_{0.5} & W_{0.5}(k) = 0.5 + 0.5\cos(k\pi / 0.5k_m) \end{cases}$$

$$H(k)W(k) = |k|W(k)$$

赤：Rampフィルタ
青：Ramp-Hanningフィルタ



画像再構成フィルタの分解能と雑音増幅係数

フィルタ係数の二乗和

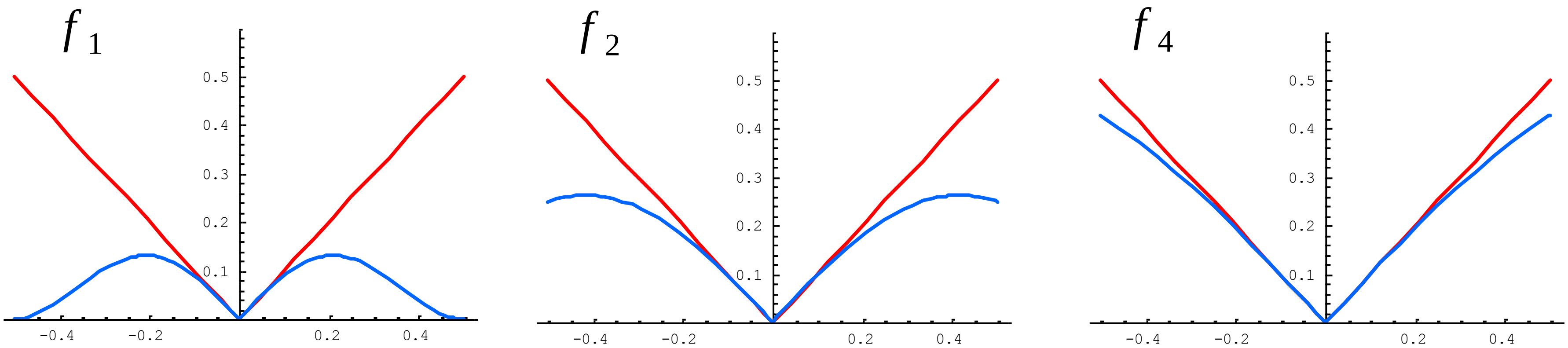
$$\begin{array}{ll} Ram-Lak & 1/12 \\ f_4 & 1/14.4 \\ Shepp-Logan & 1/20 \\ f_2 & 1/25 \\ f_1 & 1/133 \\ f_{0.5} & 1/1066 \end{array}$$

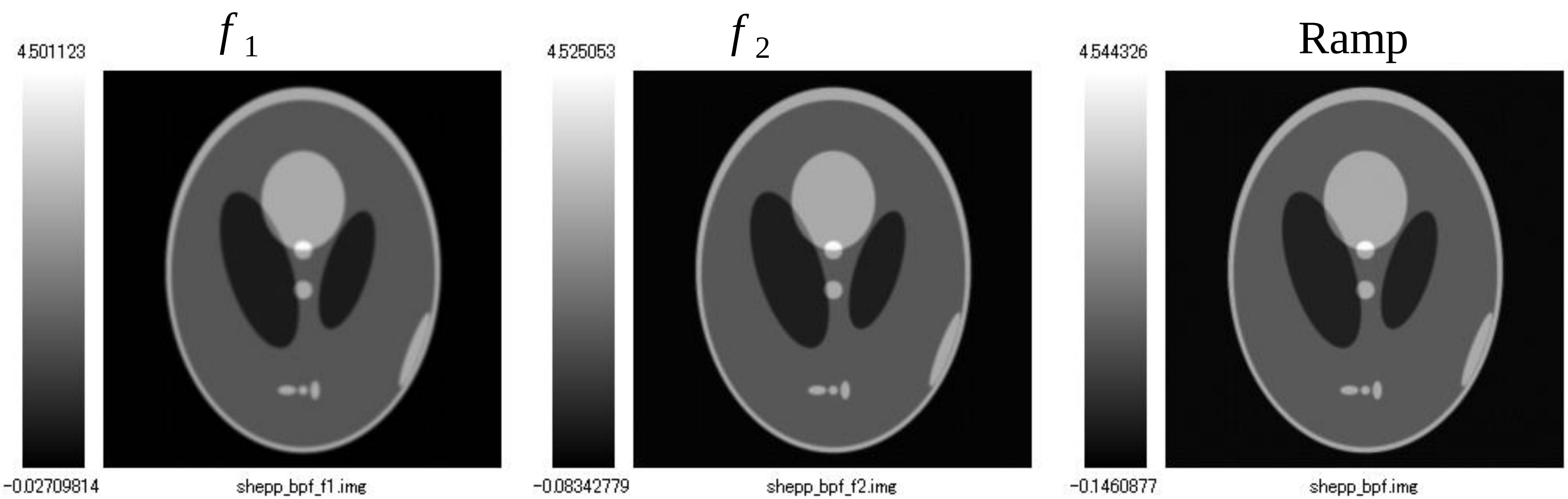
分解能 R とフィルタ補正投影の分散 $\sigma^2(p')$

$$R^3 = \frac{B}{\sigma^2(p')}$$

$$\begin{cases} Ram-Lak & 1 \\ f_4 & 0.833 \\ Shepp-Logan & 0.6 \\ f_2 & 0.480 \\ f_1 & 0.090 \\ f_{0.5} & 0.0113 \end{cases}$$

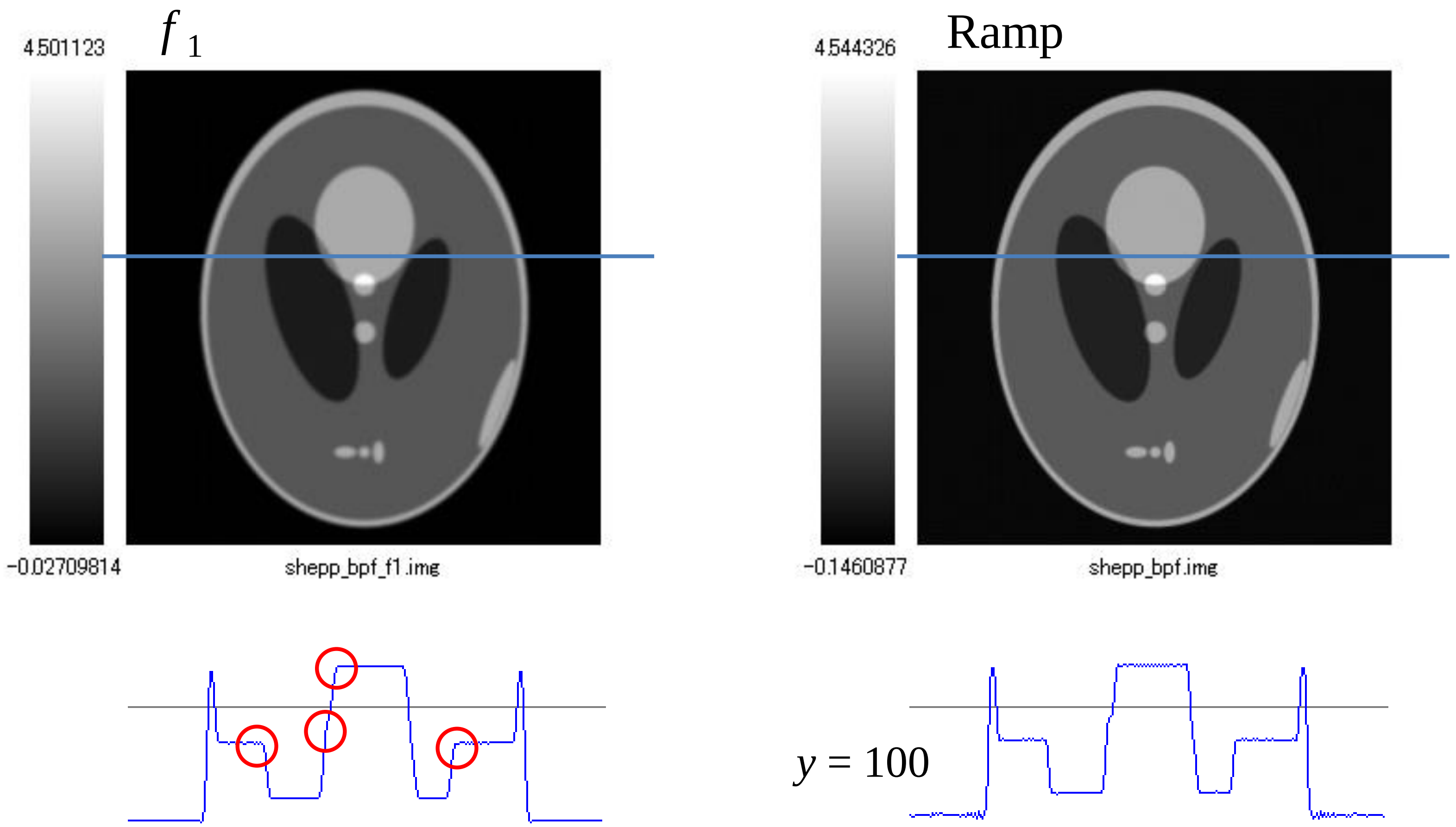
Ramp-Hanningフィルタによる再構成像





逐次近似法の反復回数 ⟶ 高周波数成分の増加

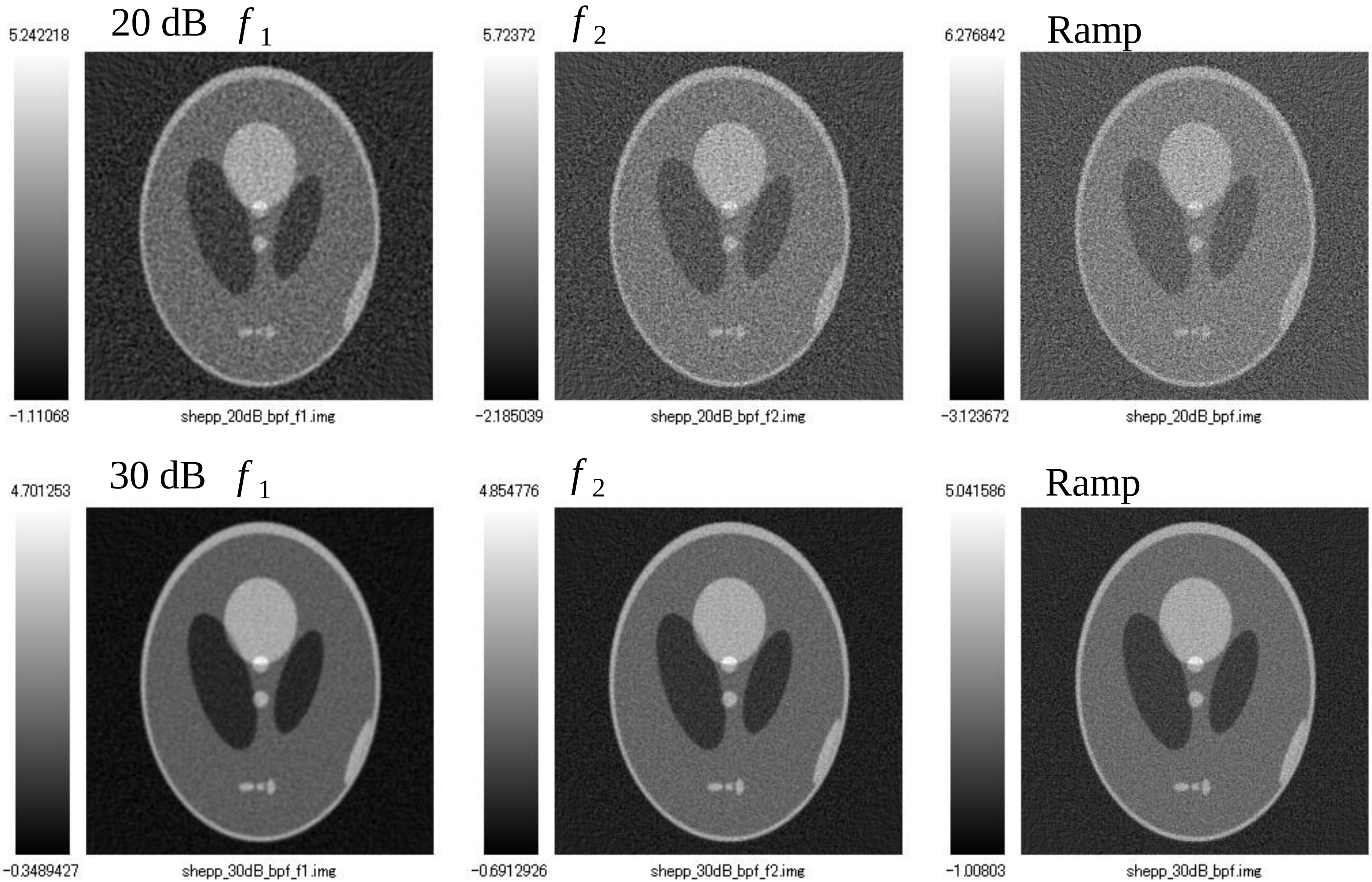
Ramp−Hanningフィルタによる再構成像



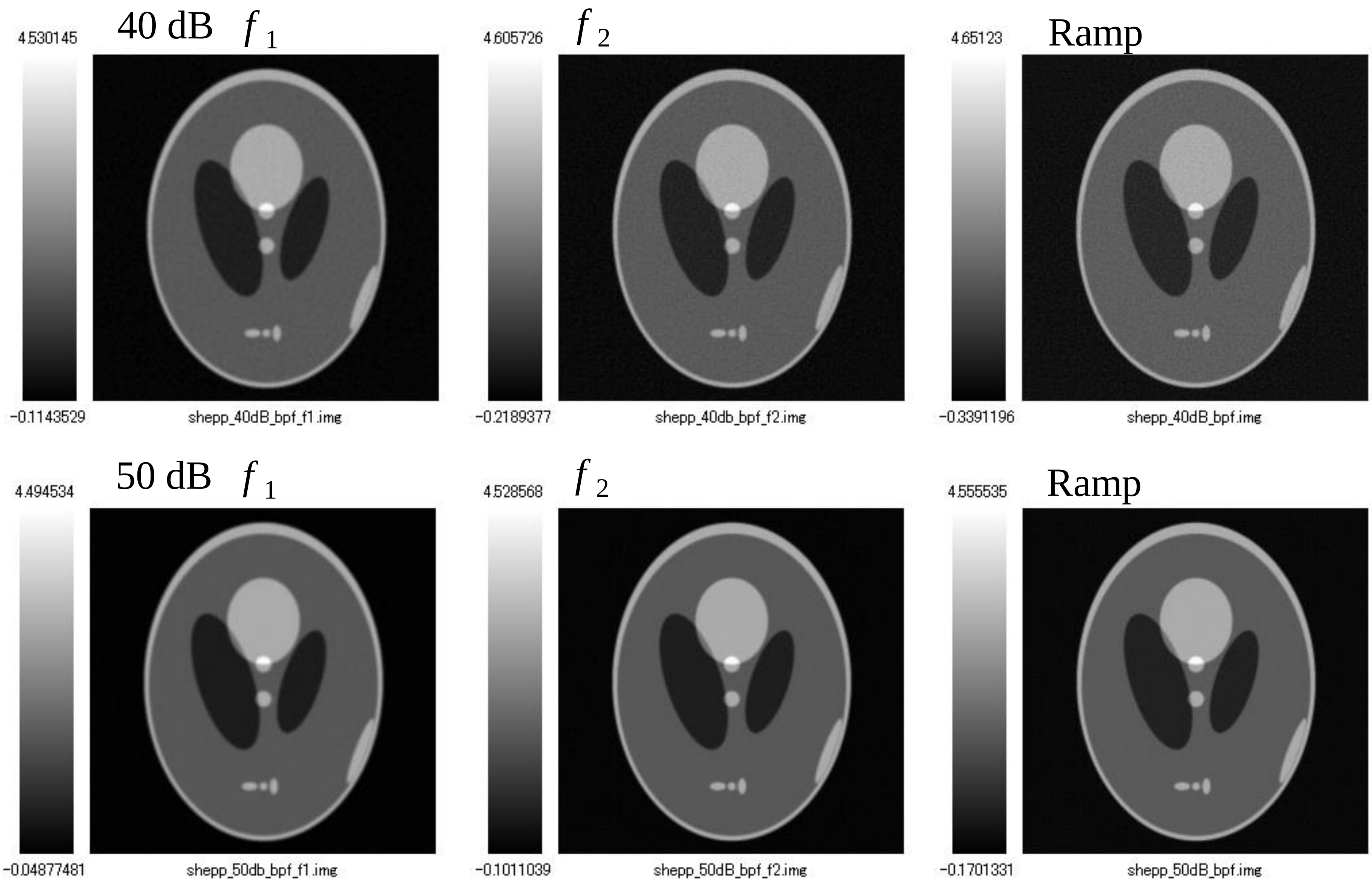
高周波数成分の不足

逐次近似法の反復回数 ⟶ 高周波数成分の増加

Ramp−Hanningフィルタによる再構成像



Ramp–Hanningフィルタによる再構成像

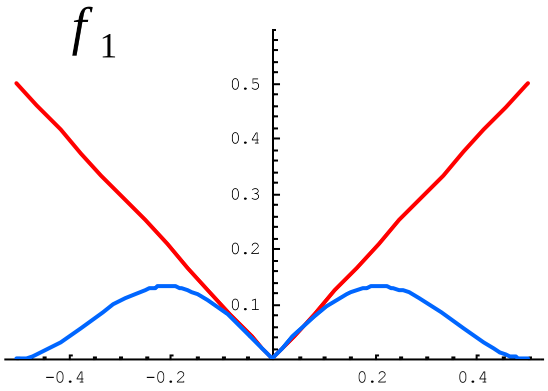


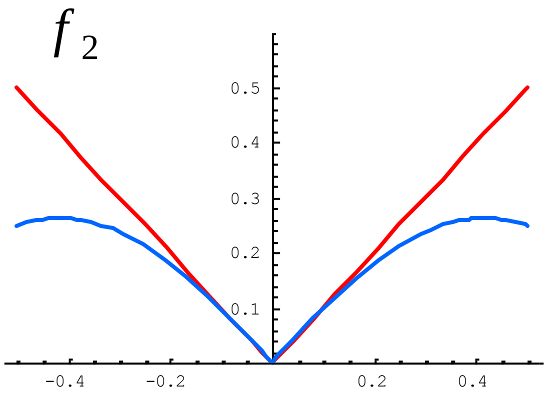
2) 代数的逐次近似法

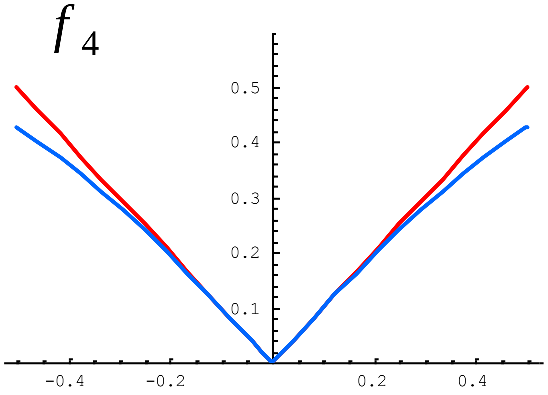
逐次近似画像再構成法

仮定した画像から計算で求めた投影（順投影）と，実測投影との整合性を反復計算によって高め原画像を再構成する．

反復計算の回数は画像再構成フィルタの幅を広げるのと同じ働き







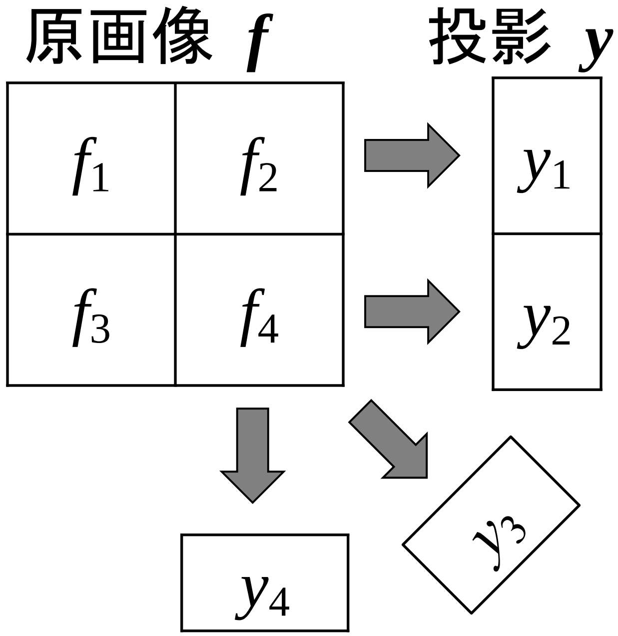
逐次近似法にはFBP法のような画像再構成フィルタの概念がない．
逐次近似法は，順投影，逆投影，そして画像と投影の関係を表す，係数行列（システム行列，投影行列）が主要な役割を果たす．

線形連立方程式

$\boldsymbol{f}$　物理量(原画像)

C　係数行列

$\boldsymbol{y}$　計測データ(投影)

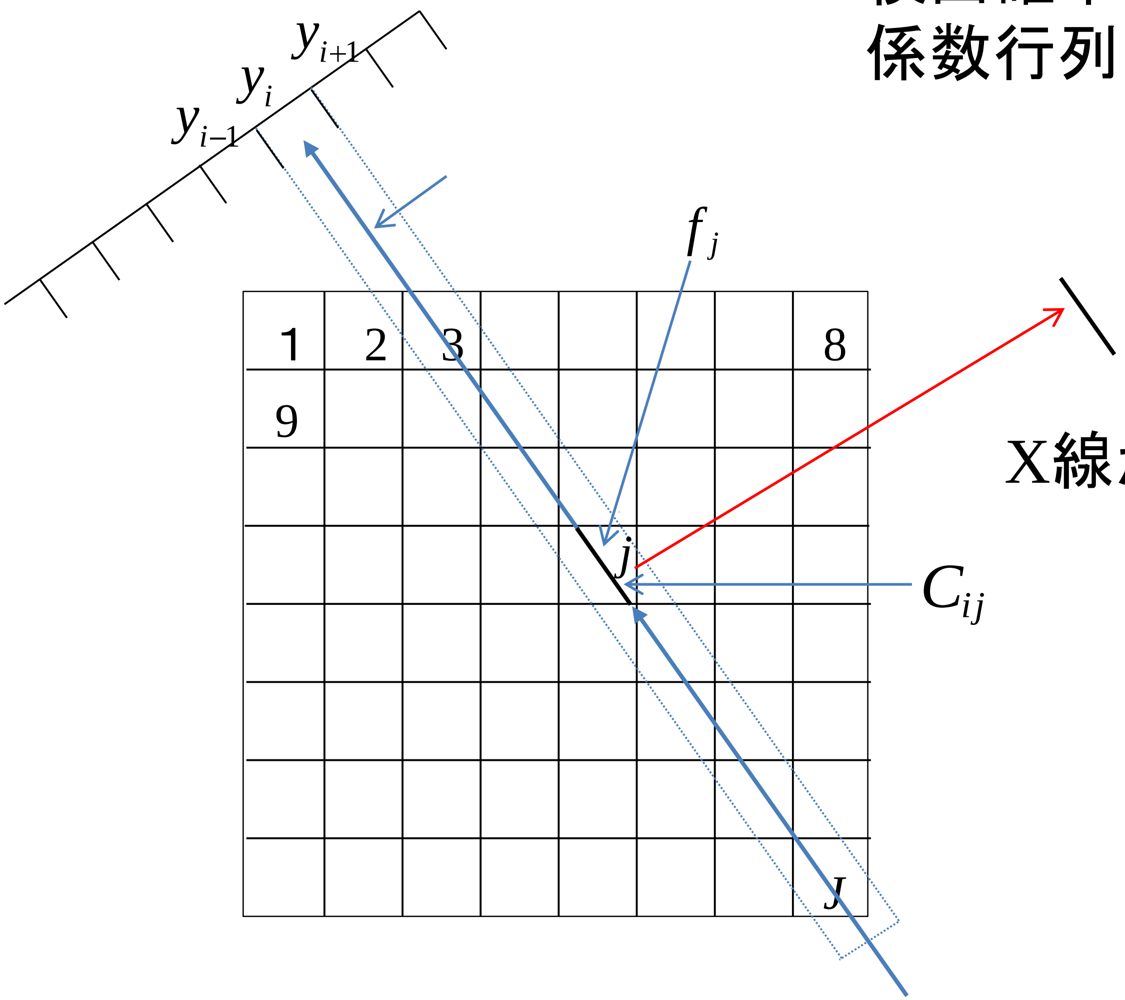


$$C\,\boldsymbol{f} = \boldsymbol{y}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}}^{C} \overbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}}^{\boldsymbol{f}} = \overbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}^{\boldsymbol{y}}$$

係数行列 C

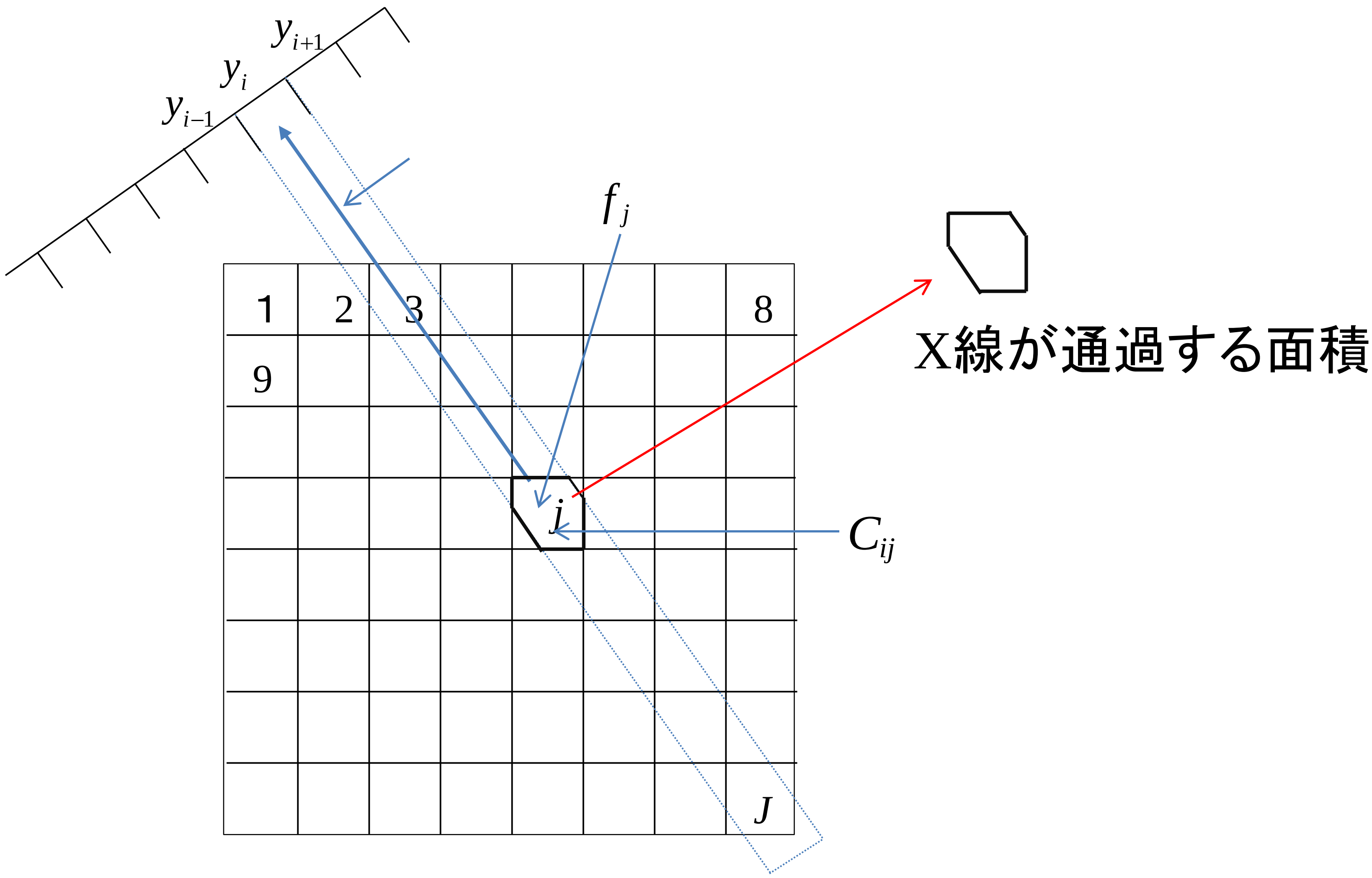
検出確率 C_{ij} からなる行列を
係数行列 C としている



X線が通過する長さ(l_{ij})

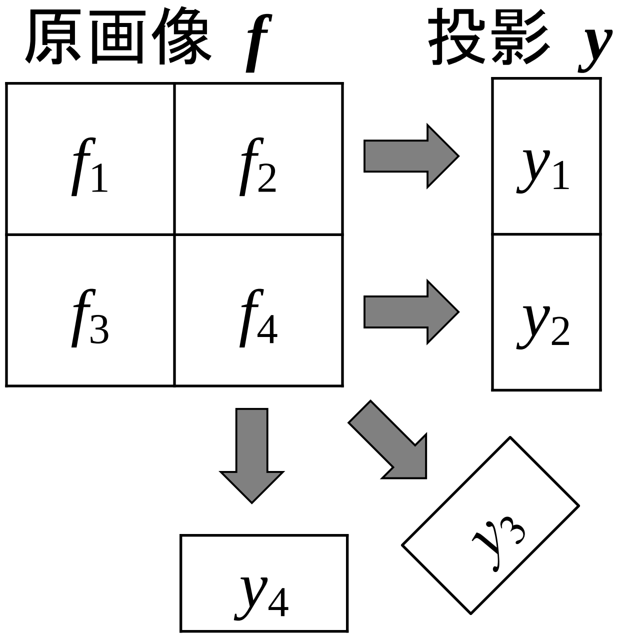
検出確率 C_{ij} : i 番目のX線が画素 j を通過する長さ(l_{ij})

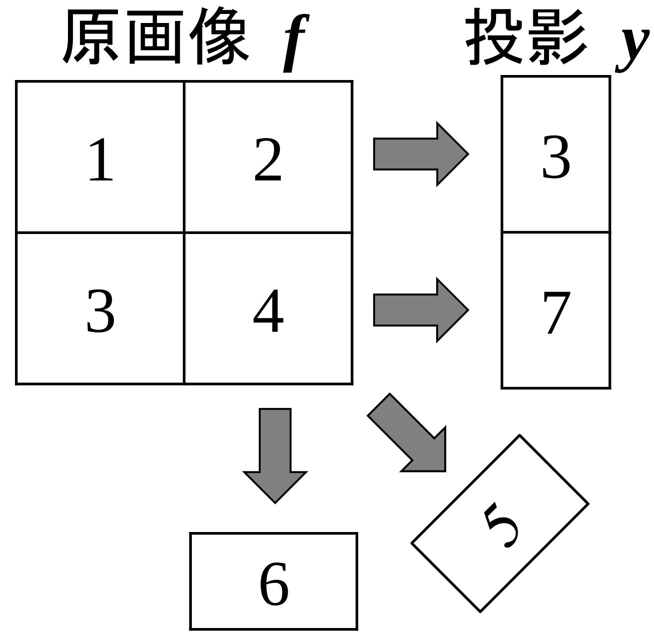
係数行列 C



検出確率 C_{ij} : i 番目のX線が画素 j を通過する面積

順投影

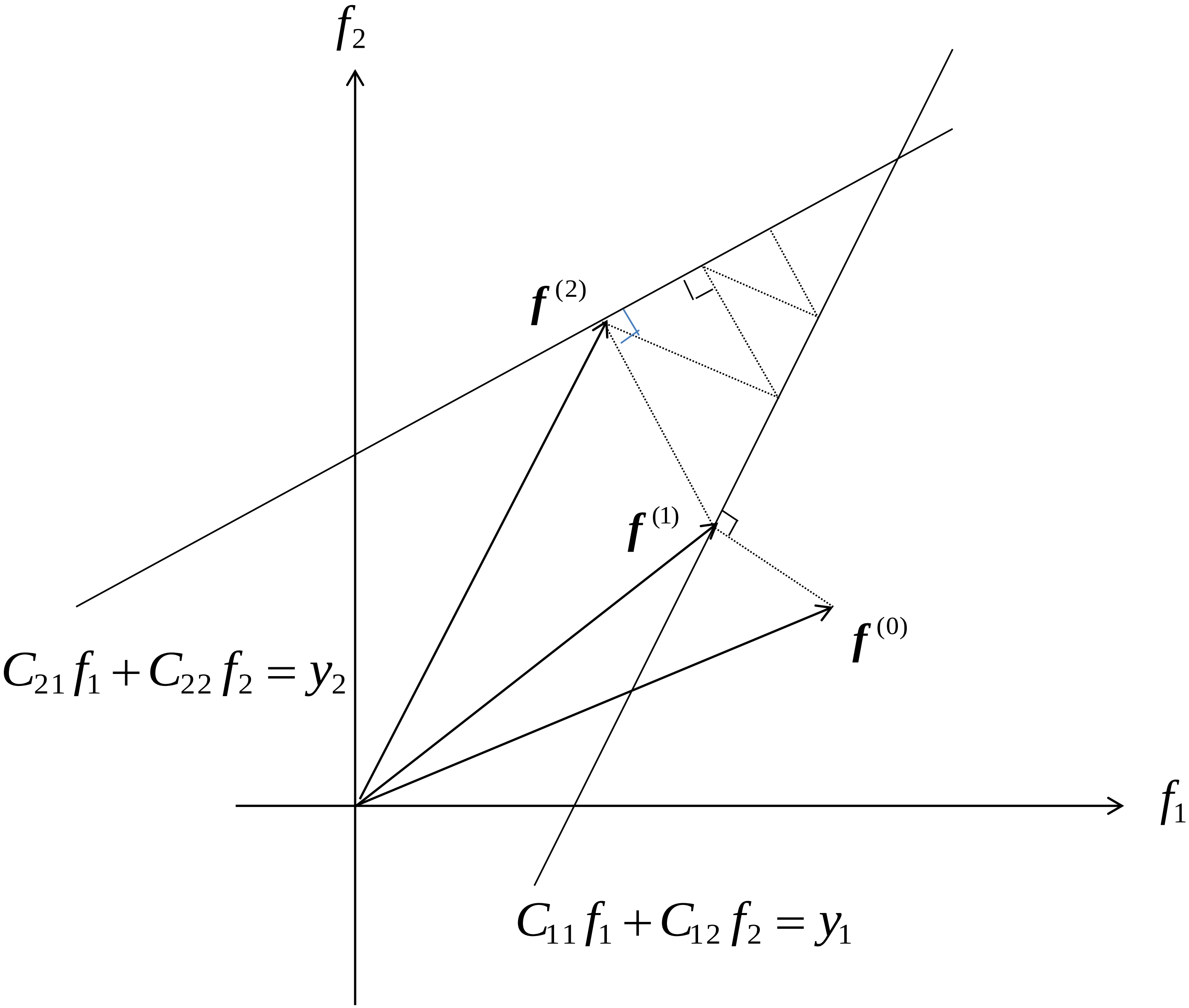




$$
\overset{C}{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}} \overset{\boldsymbol{f}}{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}} = \overset{\boldsymbol{y}}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}
$$

$$
\overset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{\boldsymbol{f}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \overset{\boldsymbol{y}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}
$$

代数的方法(ART法)

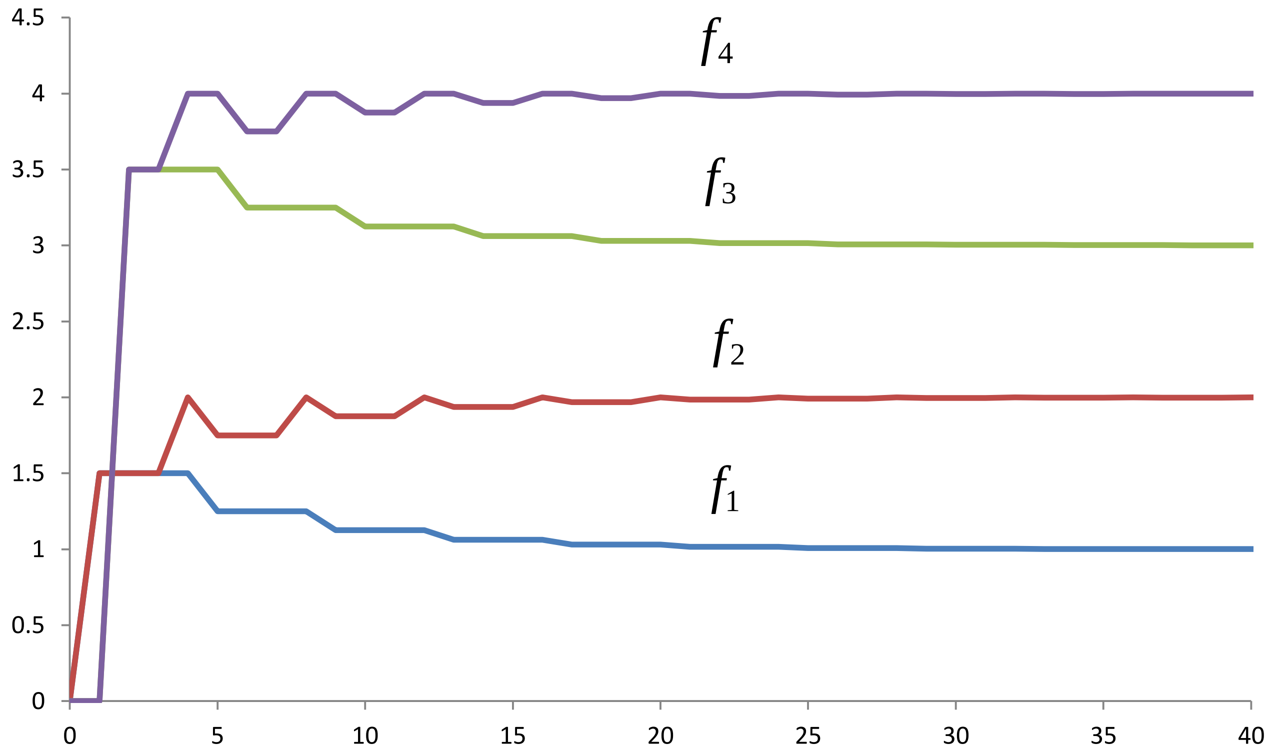


f_2
f_1
$\boldsymbol{f}^{(2)}$
$\boldsymbol{f}^{(1)}$
$\boldsymbol{f}^{(0)}$
$C_{21}f_1 + C_{22}f_2 = y_2$
$C_{11}f_1 + C_{12}f_2 = y_1$

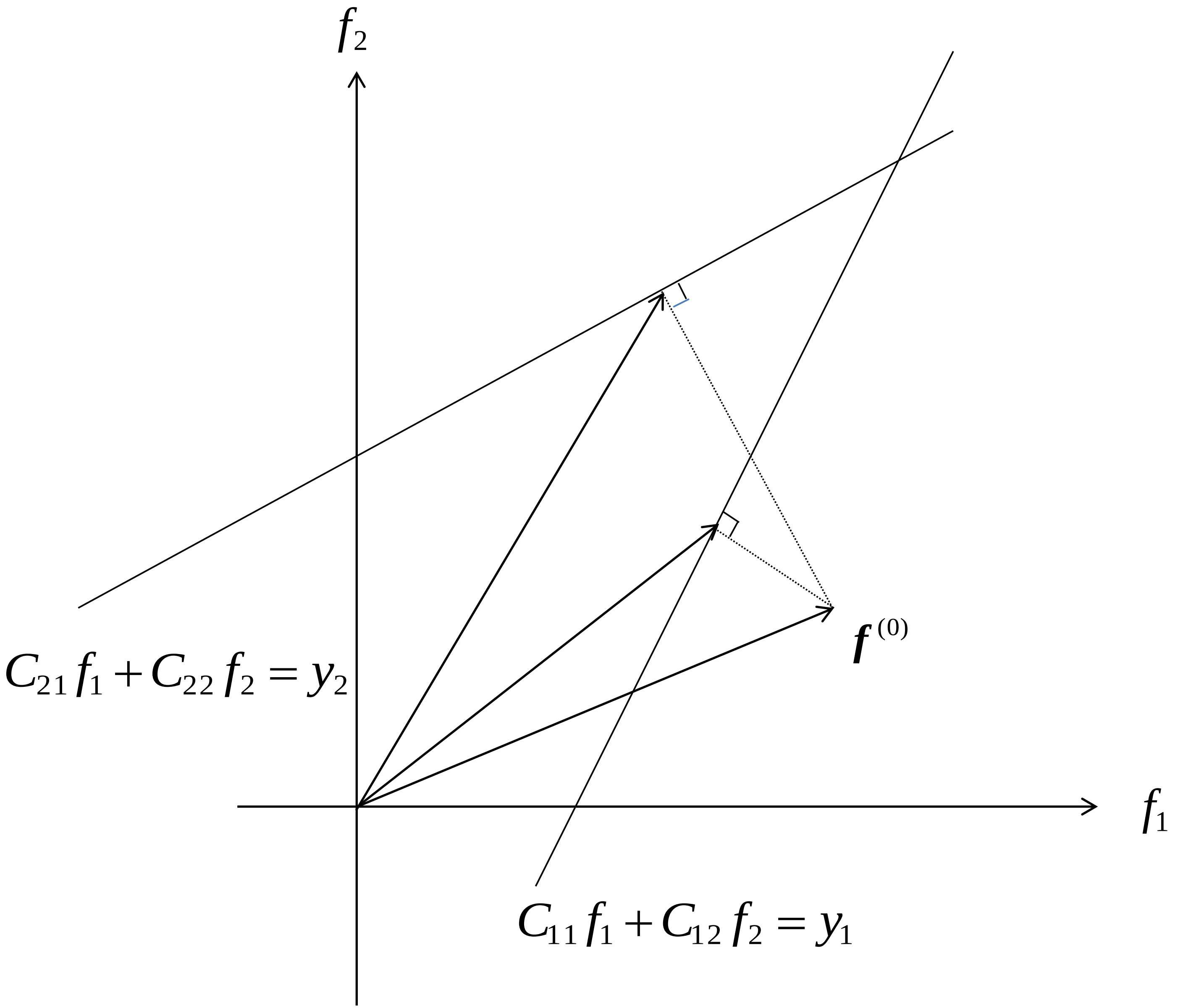
代数的方法(ART法)

$$\begin{array}{cccc} & C & & \boldsymbol{f} & & \boldsymbol{y} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f_j^{(i)} = f_j^{(i-1)} + \frac{\left(y_i - \sum_m C_{im} f_m^{(i-1)}\right) C_{ij}}{\sum_m C_{im} C_{im}}$$



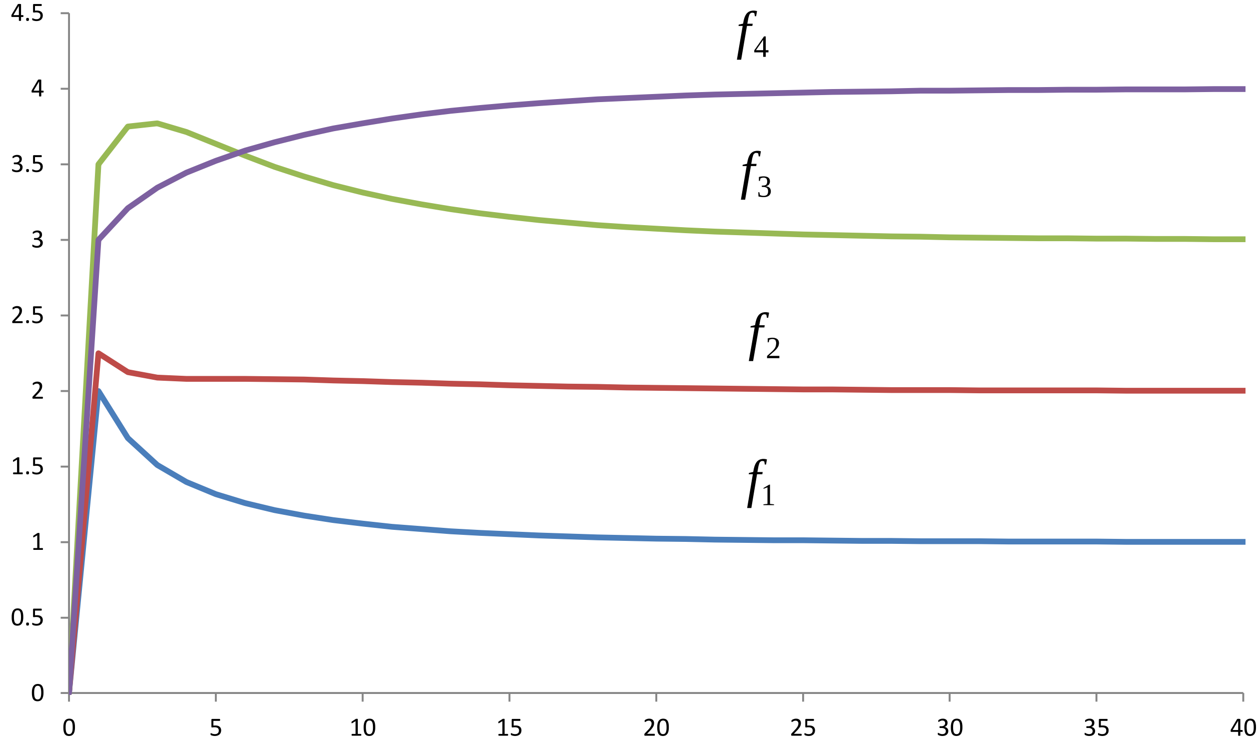
代数的方法(SIRT法）



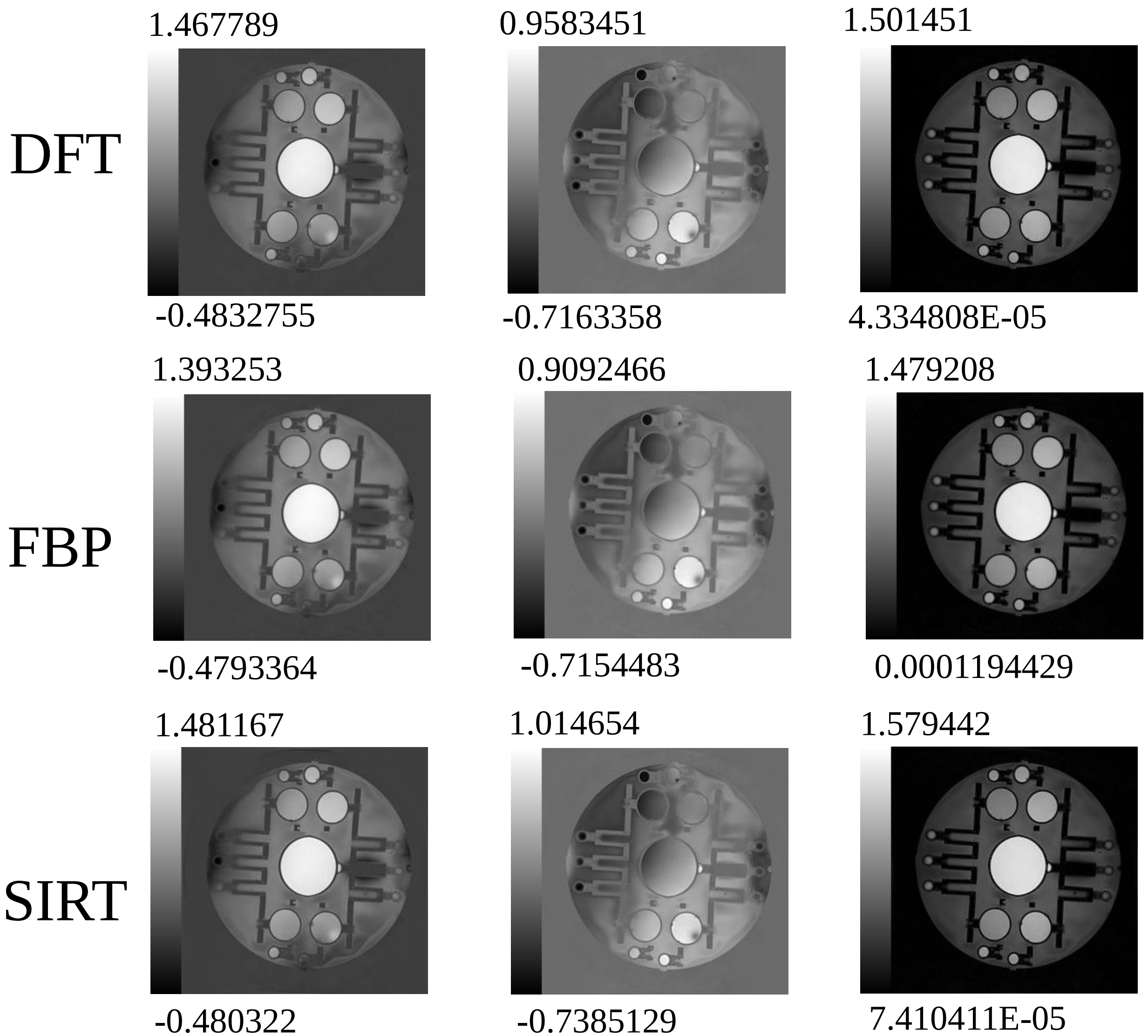
代数的方法(SIRT法）

$$\overset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{\boldsymbol{f}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \overset{\boldsymbol{y}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

$$f_j^k = f_j^{k-1} + \frac{1}{\sum_i C_{ij}} \sum_i \frac{(y_i - \sum_m C_{im} f_m^{k-1}) C_{ij}}{\sum_m C_{im}}$$



k 空間の極座標変換による MRI 画像再構成

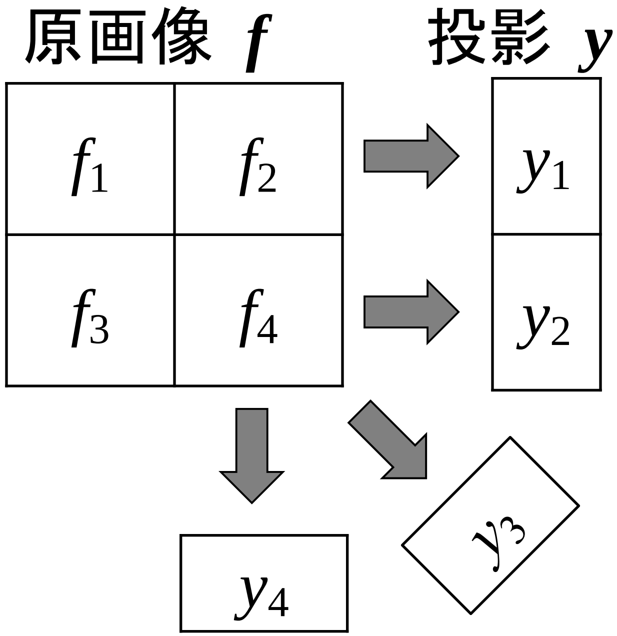


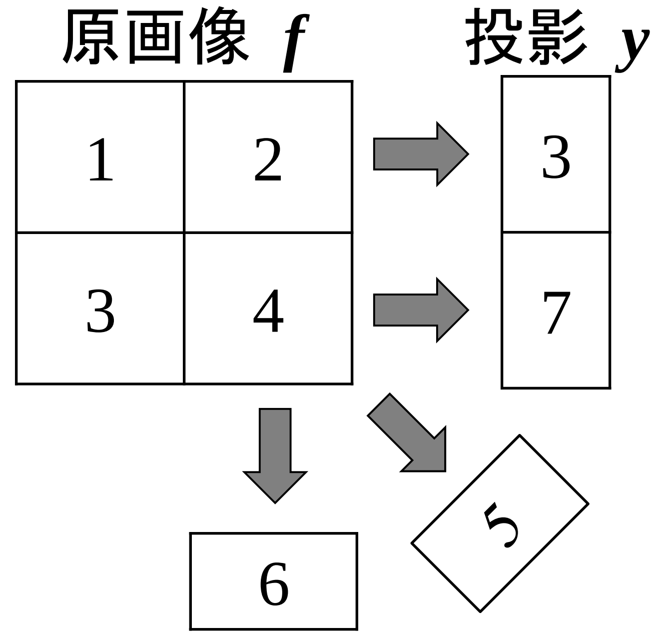
左　実部
中　虚部
右　絶対値

橘　篤志，他，日本放射線技術学会雑誌 68: 413-422, 2012

2) 最小二乗法と特異値分解

順投影

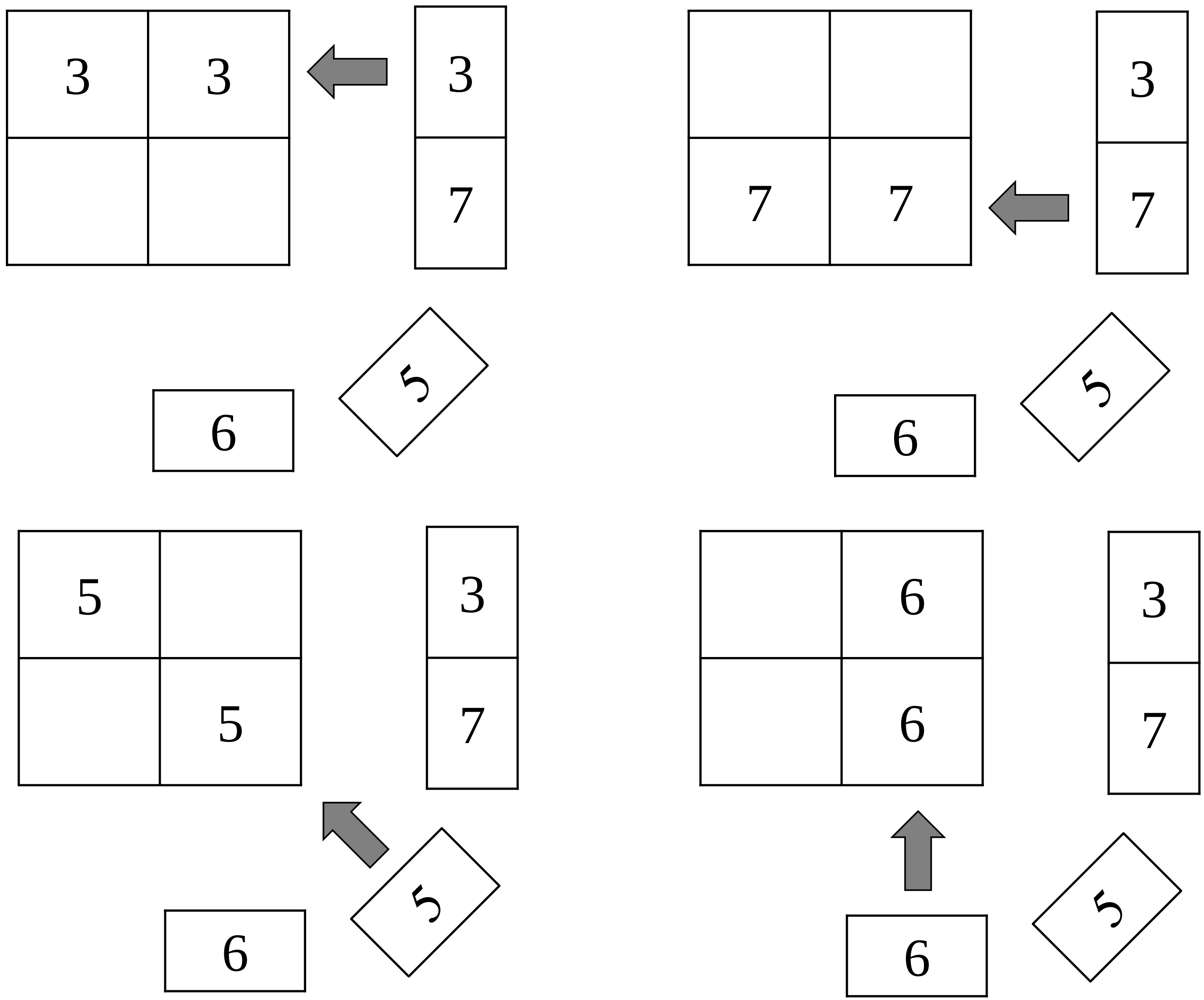




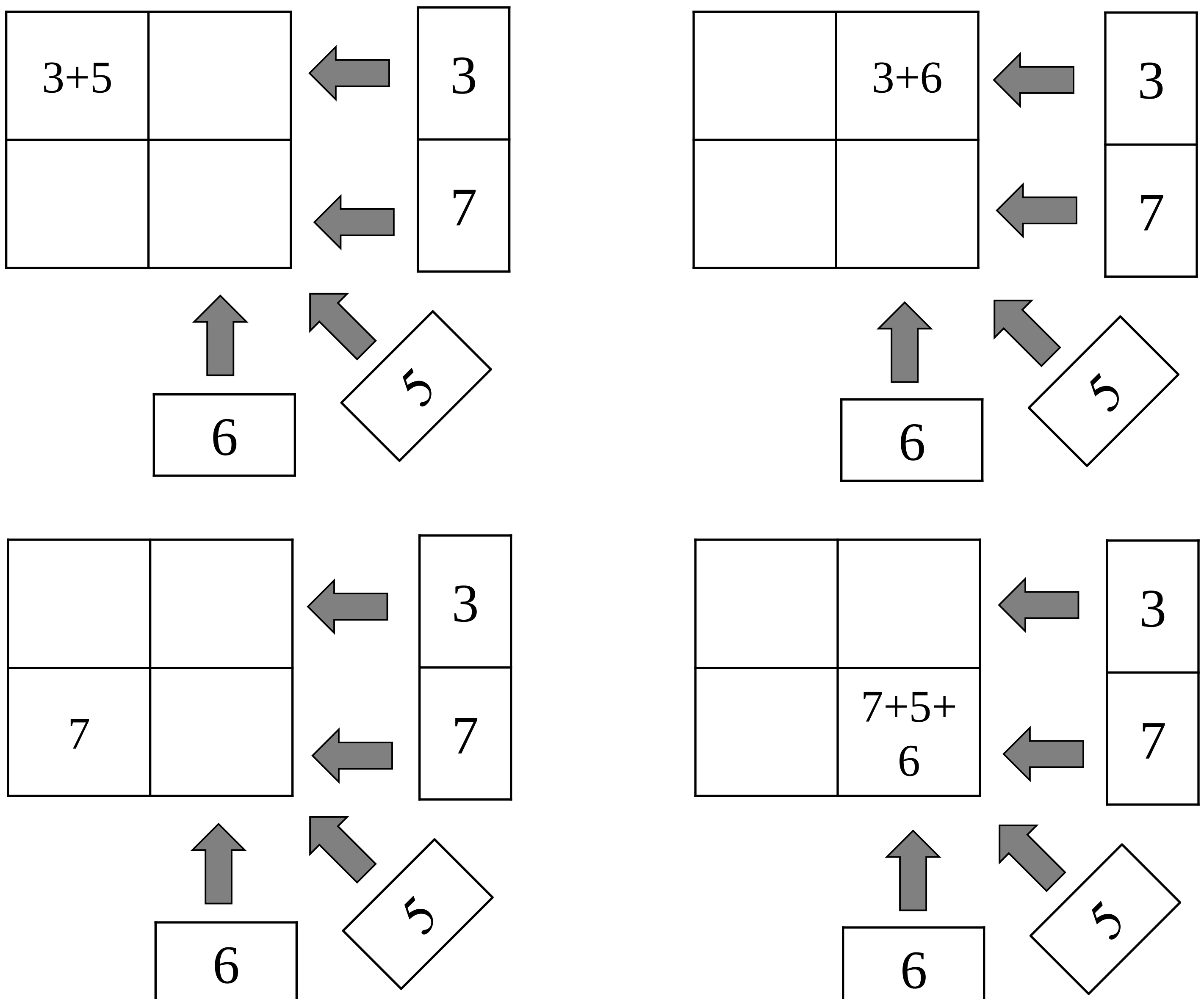
$$\overset{C}{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}} \overset{\boldsymbol{f}}{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}} = \overset{\boldsymbol{y}}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}$$

$$\overset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{\boldsymbol{f}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \overset{\boldsymbol{y}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

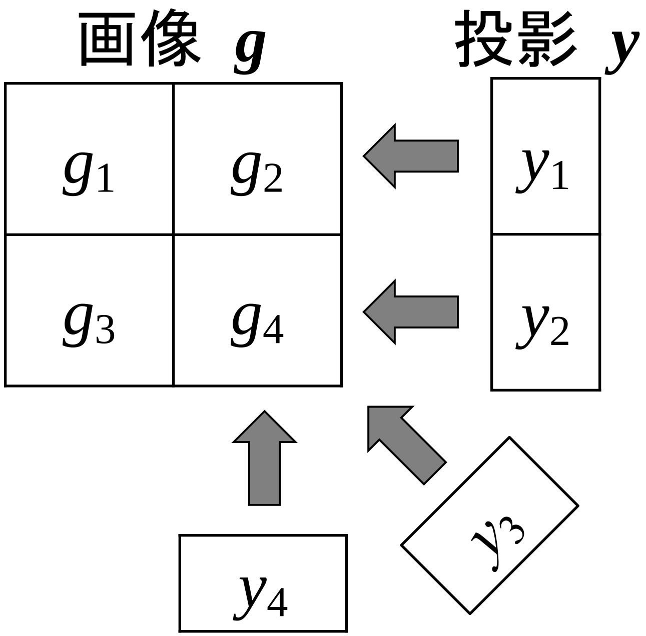
逆投影

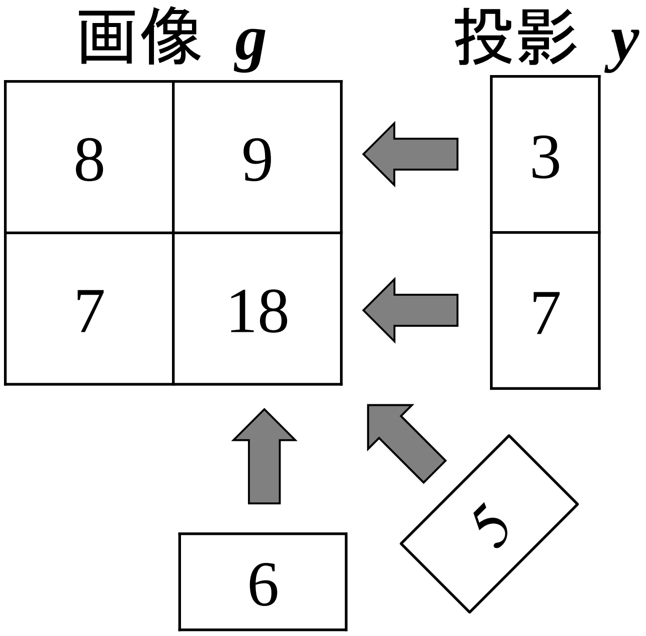


逆投影



逆投影

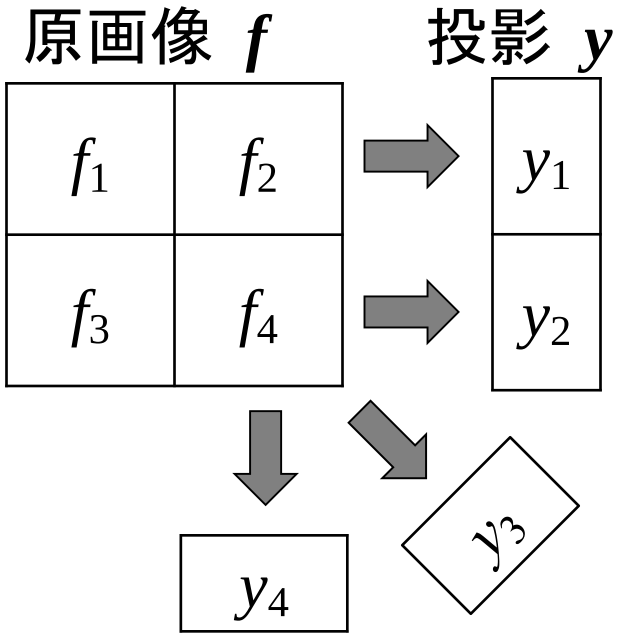


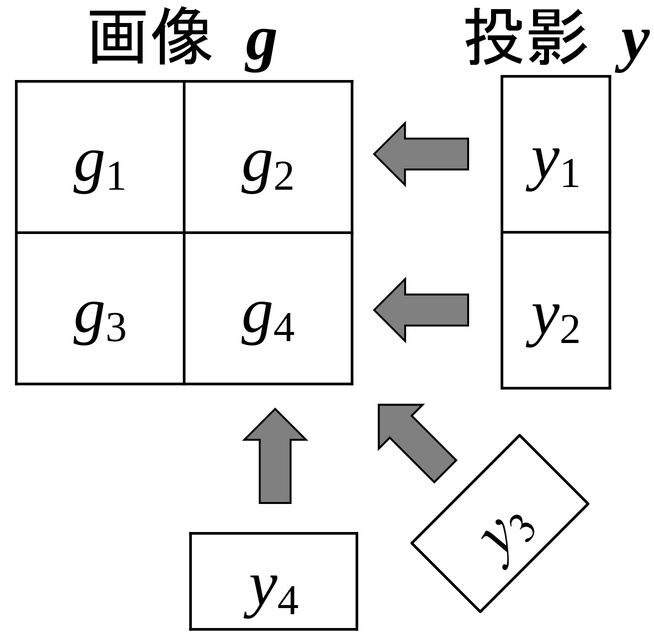


$$
\overset{\color{red}{C^T}}{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{pmatrix}}
\overset{\boldsymbol{y}}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}
=
\overset{\boldsymbol{g}}{\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}}
$$

$$
\overset{\color{red}{C^T}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}
\overset{\boldsymbol{y}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}
=
\overset{\boldsymbol{g}}{\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}}
$$

順投影と逆投影





$$\begin{array}{cccc} C & \boldsymbol{f} & & \boldsymbol{y} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} C^T & \boldsymbol{y} & & \boldsymbol{g} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

フィルタ補正逆投影法と最小二乗法の関係

フィルタ補正逆投影法

最小二乗法

$$\boldsymbol{f} \approx \{2D\ filter\}\mathrm{B}\{\boldsymbol{y}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{f} \approx \underbrace{(C^T C)^{-1}}_{\text{フィルタ処理}} \underbrace{C^T \boldsymbol{y}}_{\text{逆投影}}$$

$$H(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\boldsymbol{f} \approx \mathrm{B}\{\{1D\ filter\}\{\boldsymbol{y}\}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{f} \approx \underbrace{C^T}_{\text{逆投影}} \underbrace{(C C^T)^{-1}}_{\text{フィルタ処理}} \boldsymbol{y}$$

$$H(k) = |k|$$

FBP法は，はじめに逆投影し次にフィルタ補正するのと，はじめにフィルタ補正し次に逆投影しても同じ．

最小二乗法の解法１　特異値分解(SVD)

$$C_{11} f_1 + C_{12} f_2 + \cdots C_{1J} f_J = y_1$$

$$C_{21} f_1 + C_{22} f_2 + \cdots C_{2J} f_J = y_2 \qquad C\,\boldsymbol{f} = \boldsymbol{y}$$

$$\vdots$$

$$C_{I1} f_1 + C_{I2} f_2 + \cdots C_{IJ} f_J = y_I$$

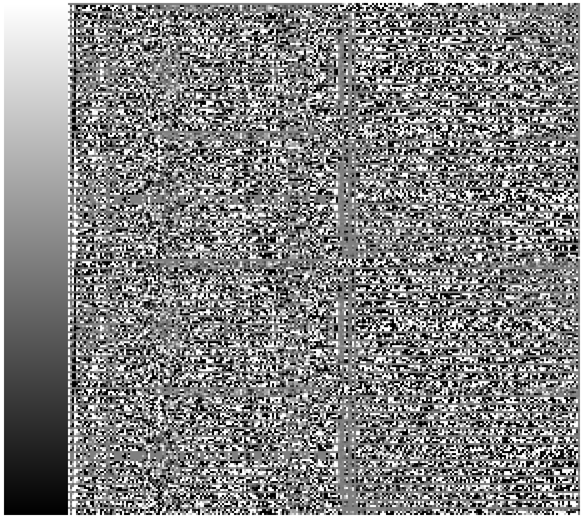
評価関数　$Q(\boldsymbol{f}) = \| C\,\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y} \|_2^2 = (C\,\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y})^T (C\,\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y})$

誤差の二乗和

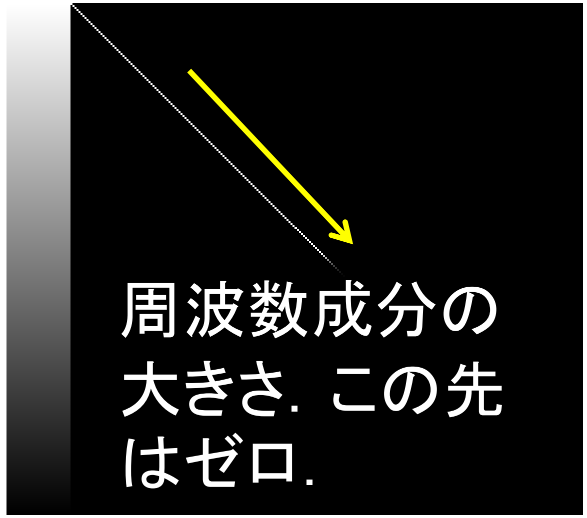
評価関数の偏微分　$\dfrac{\partial Q(\boldsymbol{f})}{\partial \boldsymbol{f}} = 2C^T (C\,\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y}) = 0$

画像再構成　$\boldsymbol{f} \approx (C^T C)^{-1} C^T \boldsymbol{y}, \quad C = U W V^T$

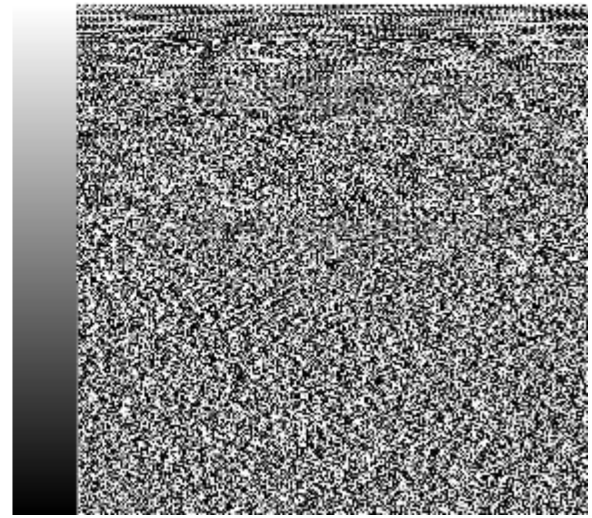
特異値分解の固有値と逐次近似法の反復回数



(a) 行列 U

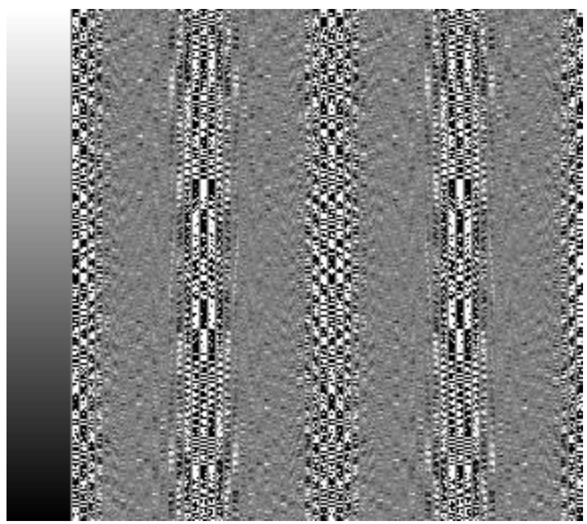


(b) 行列 W



(c) 行列 V^T

(d) 疑似逆行列 C^+

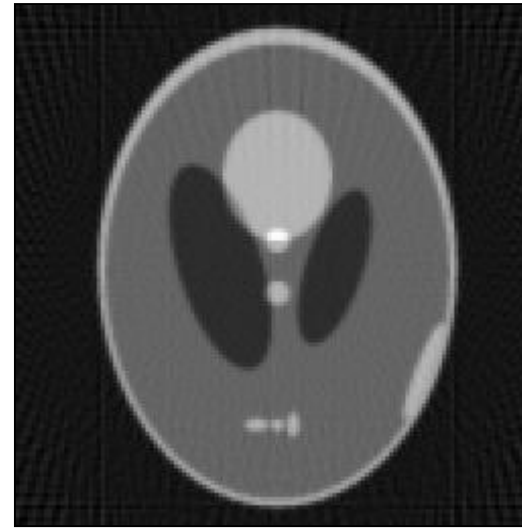


行列Wは固有値を大きい順に並べたもので周波数成分に相当する.
逐次近似法の反復回数は, 黄色矢印に相当.

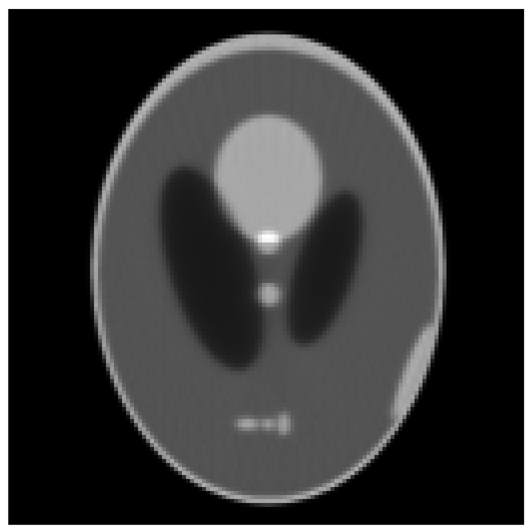
特異値分解(SVD)による画像再構成


原画像


SVD


FBP

画像再構成法	平均絶対誤差
SVD	0.00195
FBP	0.00798
ML-EM	0.00371
OS-EM	0.00270


ML-EM


OS-EM

3) 最小二乗法の逐次近似解

最小二乗法の解法２　逐次近似法

評価関数　$Q(\boldsymbol{f}) = \| C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y} \|_2^2 = (C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y})^T (C\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y})$

誤差の勾配　$\boldsymbol{g} = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q(\boldsymbol{f})}{\partial \boldsymbol{f}} = C^T(\boldsymbol{y} - C\boldsymbol{f})$

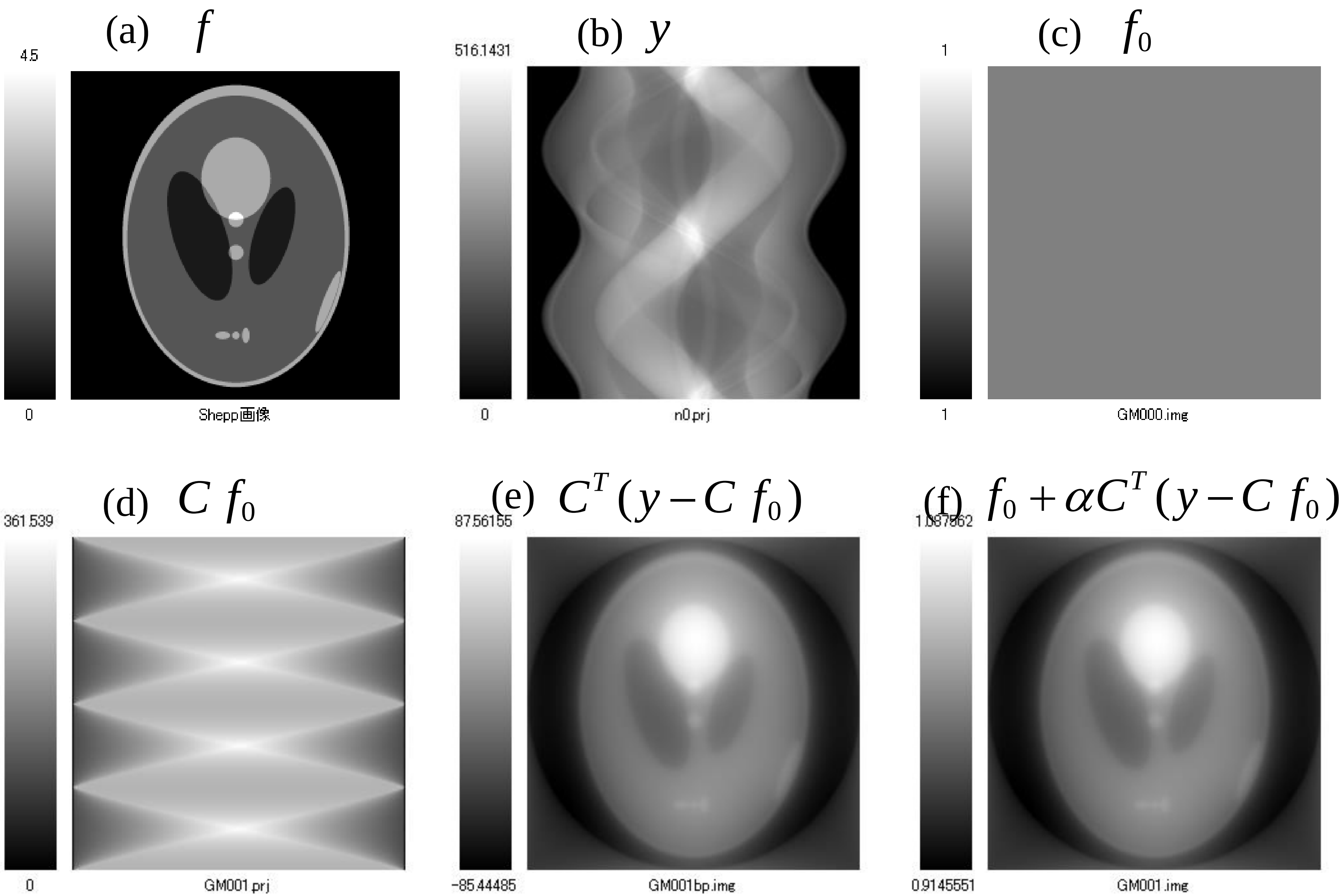
反復式　$\boldsymbol{f}_{k+1} = \boldsymbol{f}_k + \alpha_k \boldsymbol{g}_k, \qquad \boldsymbol{g}_k = C^T(\boldsymbol{y} - C\boldsymbol{f}_k)$

勾配法

最急降下法

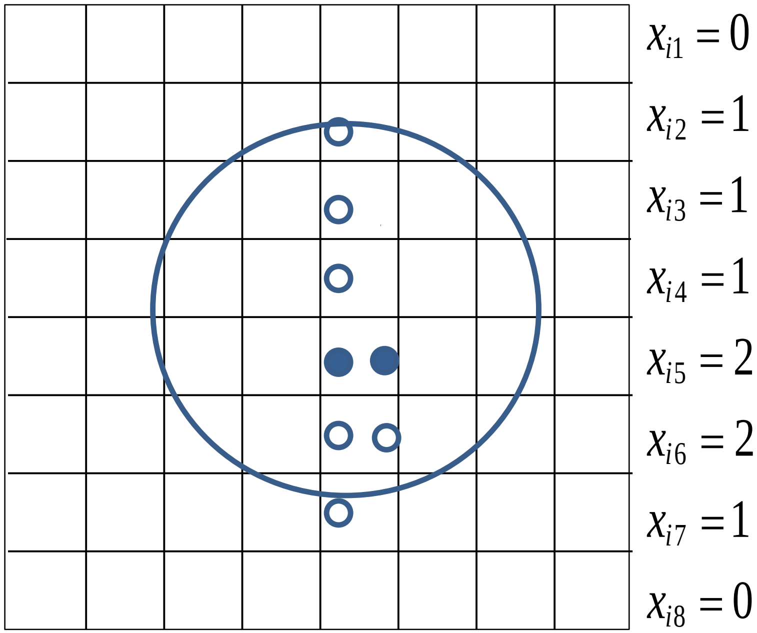
共役勾配法

最小二乗法の解法 2　逐次近似法

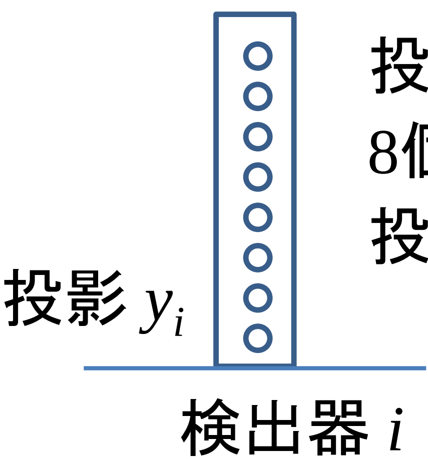


4) 統計的方法

完全データ x_{ij} と不完全データ y



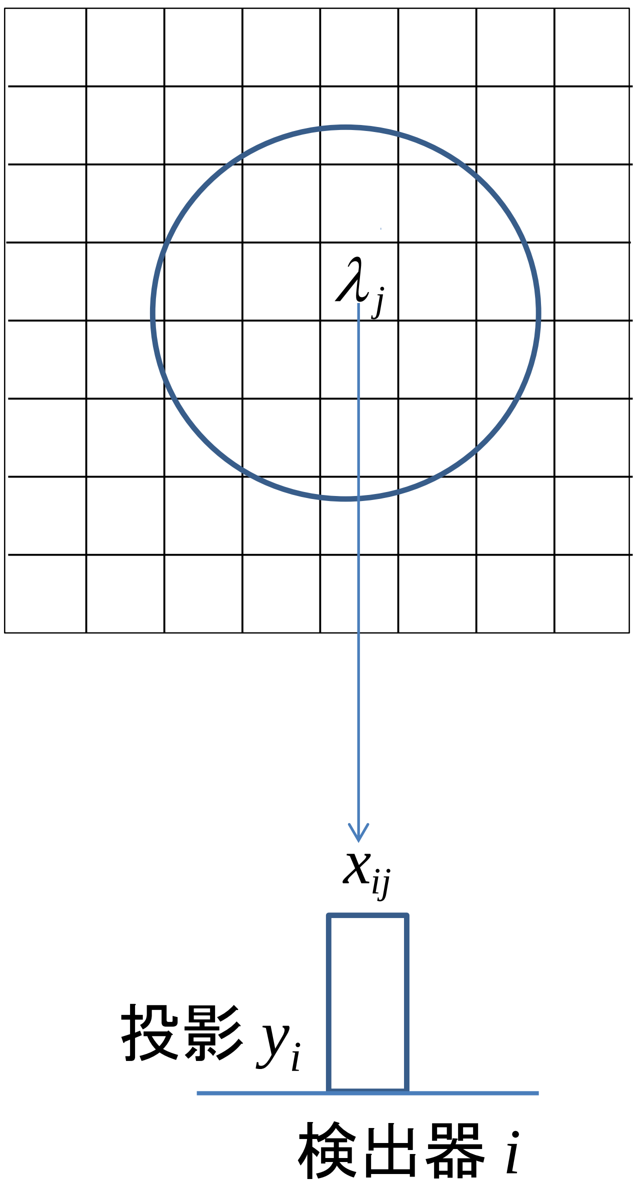
x_{ij} は画素 j から検出器 i に入射する光子数
（完全データ：観測できない）



投影データ y：不完全データ
8個の光子がどこの画素から入射したかは不明
投影は完全データ x_{ij} の和として計測される

$$y_i = x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}+x_{i5}+x_{i6}+x_{i7}+x_{i8}$$

完全データ x_{ij}



画素 j から検出器 i に入射する光子数

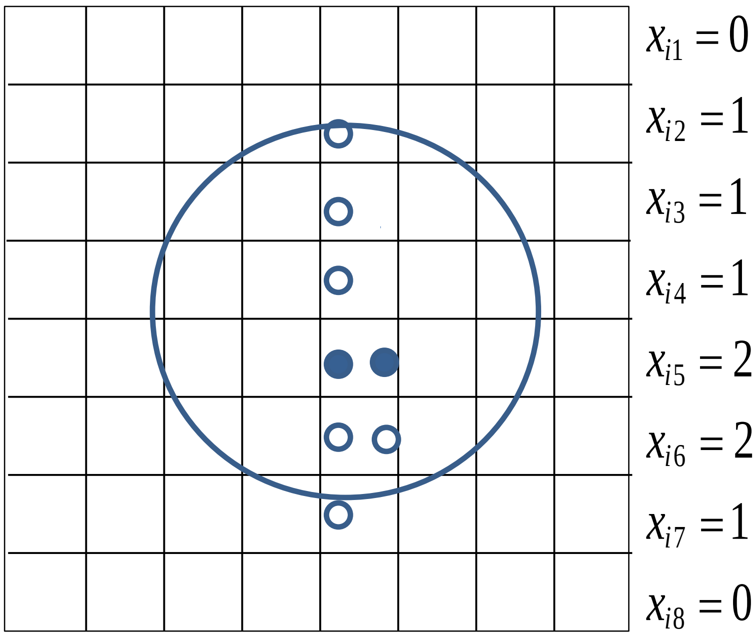
$$P(x_{ij}) = e^{-\bar{x}_{ij}} \frac{(\bar{x}_{ij})^{x_{ij}}}{x_{ij}\,!} = e^{-C_{ij}\lambda_j} \frac{(C_{ij}\lambda_j)^{x_{ij}}}{x_{ij}\,!}$$

$\bar{x}_{ij}$　期待値（平均値）

C_{ij}　検出確率

完全データはポアソン分布

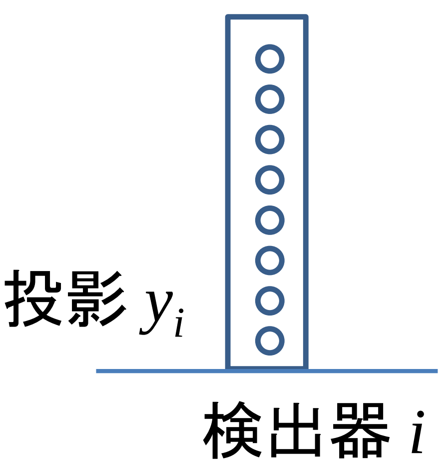
投影 y_i が得られる同時確率



投影 y_i は完全データの和であるからポアソン分布になる.

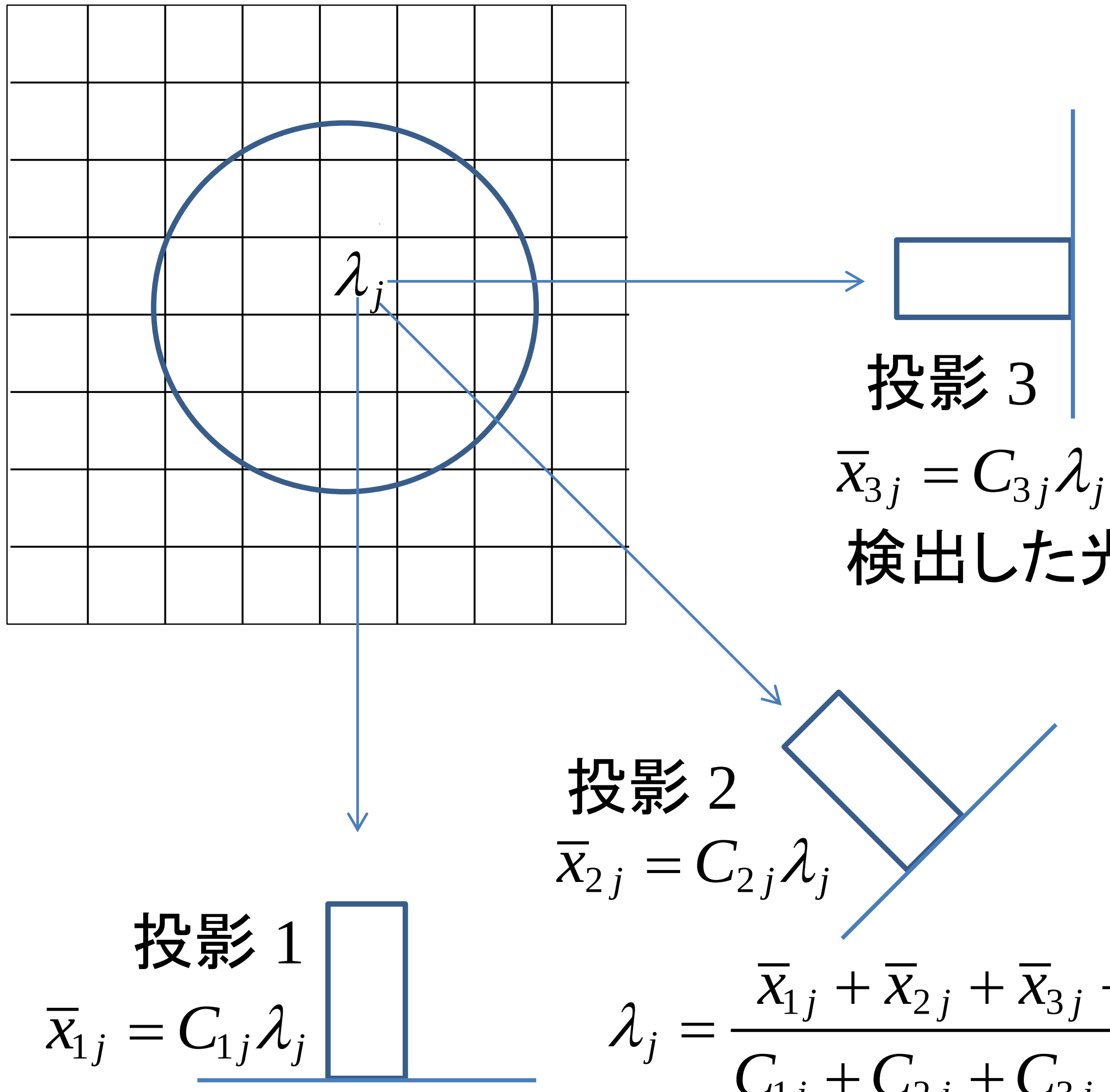
$$y_i = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{i7} + x_{i8}$$

平均　$C_{11}\lambda_1 + C_{12}\lambda_2 + \cdots + C_{18}\lambda_8 = \sum_{j=1}^{8} C_{ij}\lambda_j$



$$P(y_i) = e^{-\sum_j C_{ij}\lambda_j} \frac{\left(-\sum_j C_{ij}\lambda_j\right)^{y_i}}{y_i\,!}$$

完全データ x_{ij} の平均 $\bar{x}_{ij}$ が既知の場合の λ_j の推定



$$\lambda_j = \frac{\bar{x}_{1j} + \bar{x}_{2j} + \bar{x}_{3j} + \cdots + \bar{x}_{nj}}{C_{1j} + C_{2j} + C_{3j} + \cdots + C_{nj}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} C_{ij}}$$

λ_j の最尤推定

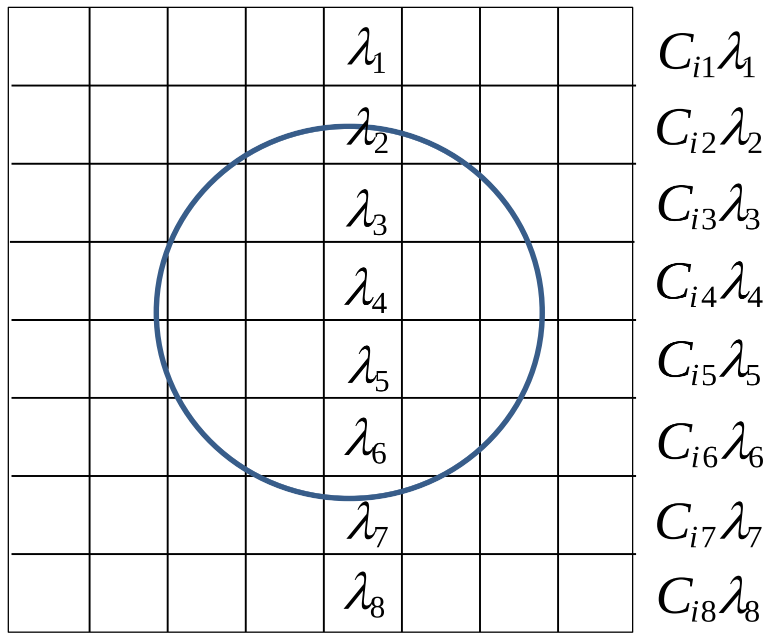
$$\lambda_j = \frac{\overline{x}_{1j} + \overline{x}_{2j} + \overline{x}_{3j} + \cdots + \overline{x}_{nj}}{C_{1j} + C_{2j} + C_{3j} + \cdots + C_{nj}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} C_{ij}}$$

上式の平均 $\overline{x}_{ij}$ の代わりに仮想的な観測量として導入した完全データ x_{ij} を用いた

$$\hat{\lambda}_j = \frac{x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + \cdots + x_{nj}}{C_{1j} + C_{2j} + C_{3j} + \cdots + C_{nj}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} C_{ij}}$$

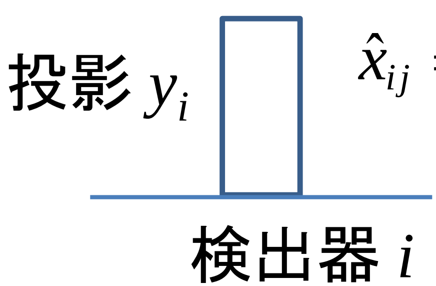
が λ_j の最尤推定になる.

投影 y_i が得られたもとでの完全データの事後推定



$$\sum_{m=1} C_{im}\lambda_m$$

$\hat{x}_{ij}$　完全データの推定値



$$\hat{x}_{ij} = \frac{y_i C_{ij}\lambda_j}{\sum_{m=1} C_{im}\lambda_m}$$

事後（MAP）推定

ML-EM 式の成り立ち

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1} x_{ij}}{\sum_{i=1} C_{ij}} = \frac{x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+\cdots+x_{nj}}{C_{1j}+C_{2j}+C_{3j}+\cdots+C_{nj}}$$

$$\hat{\lambda}_j^{k+1}$$

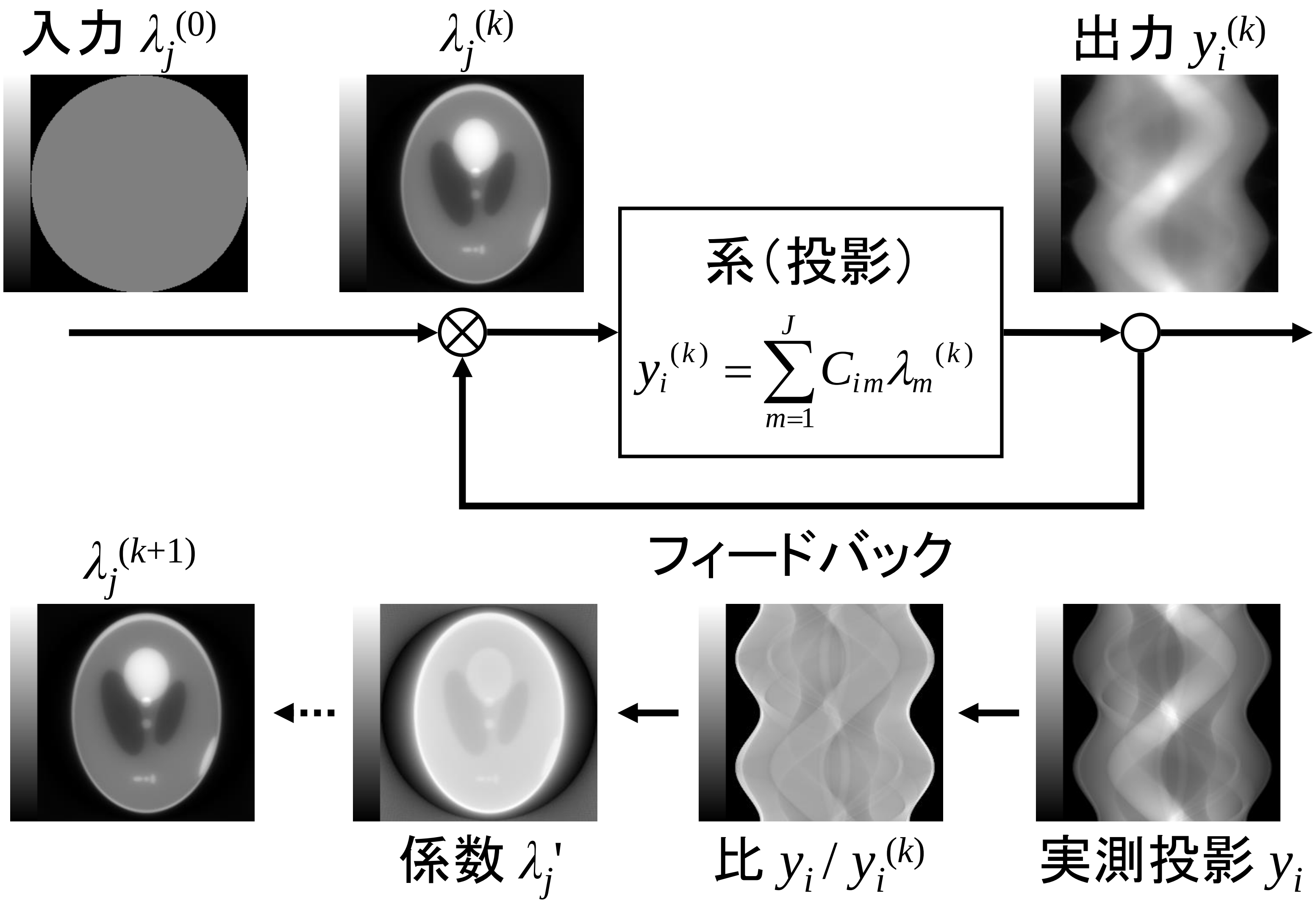
$$\hat{\lambda}_j^{k}$$

$$\hat{x}_{ij} = \frac{y_i C_{ij}\lambda_j}{\sum_{m=1} C_{in}\lambda_m}$$

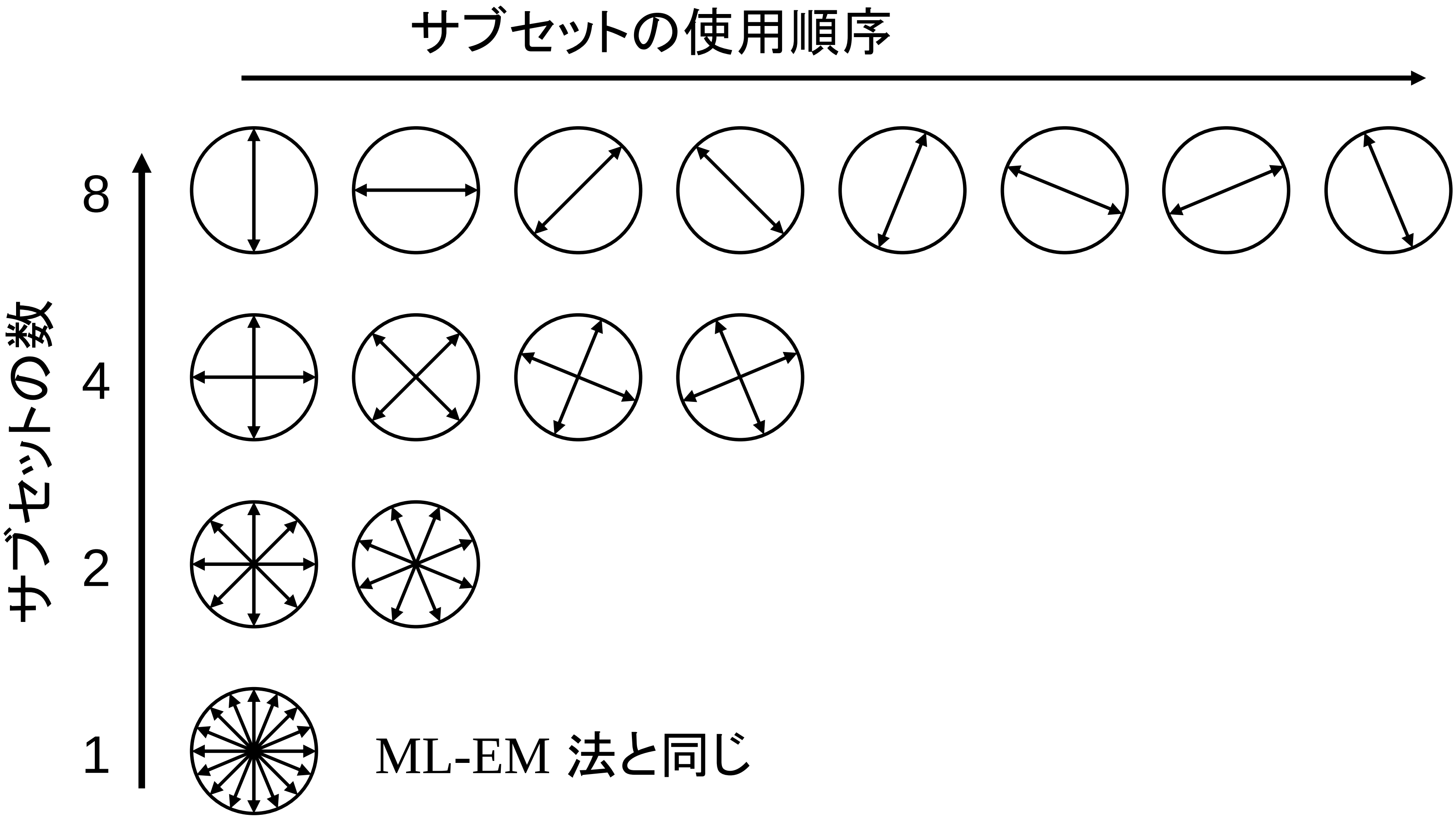
$$\hat{\lambda}_m^{k}$$

$$\hat{\lambda}_j^{k+1} = \frac{1}{\sum_{i=1} C_{ij}} \sum_{i=1} \frac{y_i C_{ij}\hat{\lambda}_j^{k}}{\sum_{m=1} C_{im}\hat{\lambda}_m^{k}} \longrightarrow \lambda_j^{k+1} = \frac{\lambda_j^{k}}{\sum_{i=1} C_{ij}} \sum_{i=1} \frac{y_i C_{ij}}{\sum_{m=1} C_{im}\lambda_m^{k}}$$

ML-EM 法の計算過程

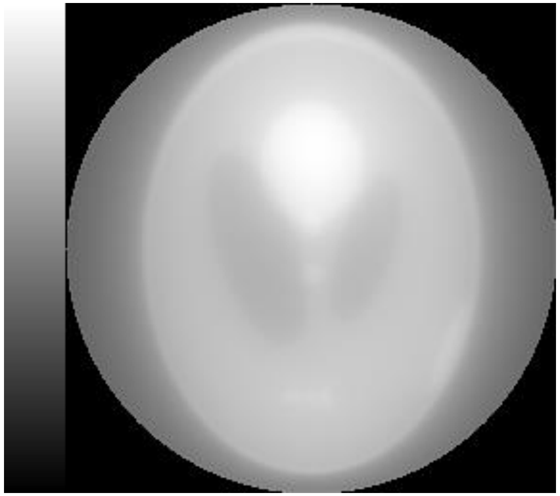

入力 $\lambda_j^{(0)}$
$\lambda_j^{(k)}$
出力 $y_i^{(k)}$
系（投影）
$y_i^{(k)} = \sum_{m=1}^{J} C_{im}\lambda_m^{(k)}$
フィードバック
$\lambda_j^{(k+1)}$
係数 λ_j'
比 $y_i / y_i^{(k)}$
実測投影 y_i

OS-EM（Orderd Subset EM 法）

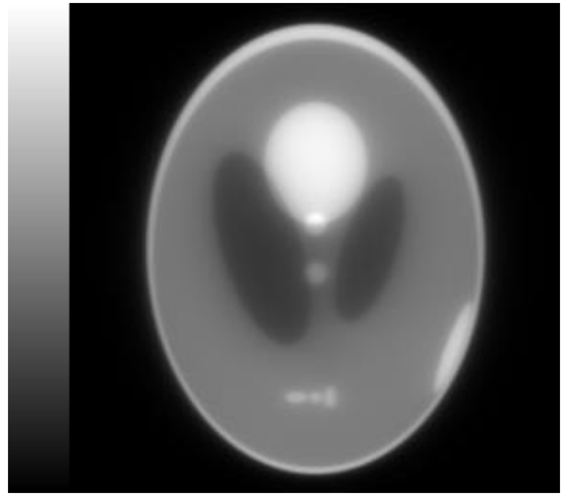


ML-EM

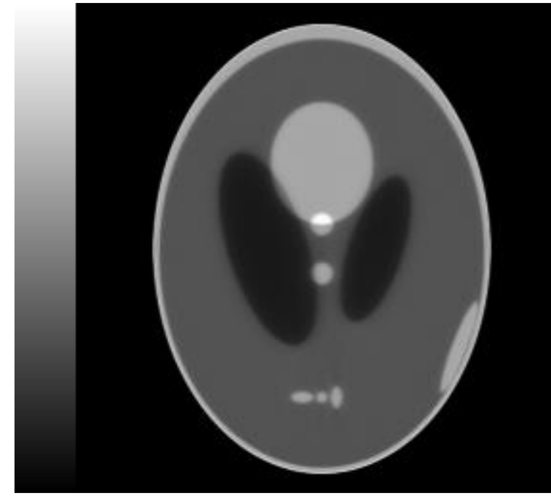
(a) 1 回



(b) 10 回

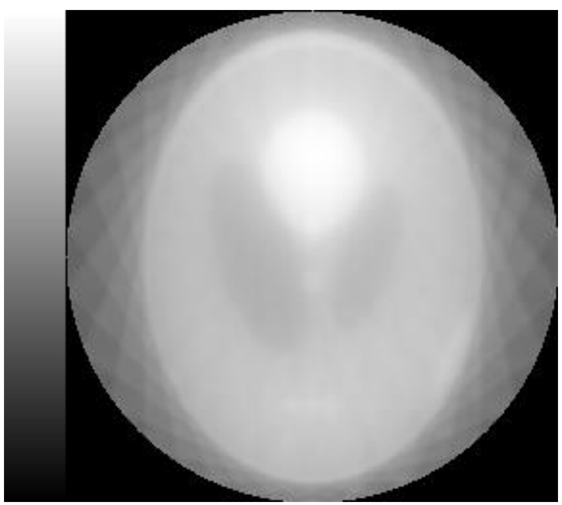


(c) 50 回

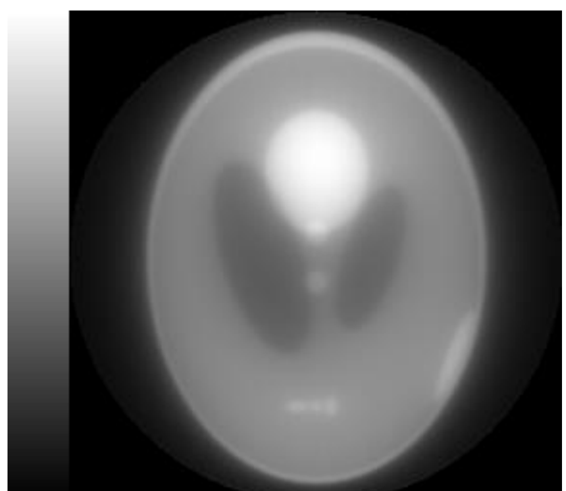


OS-EM

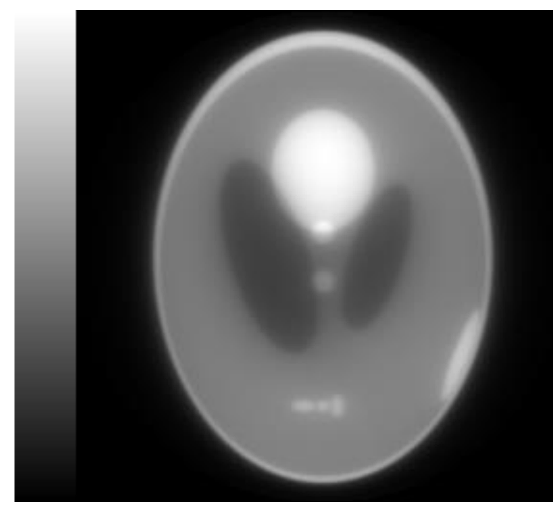
(a) サブセット 1



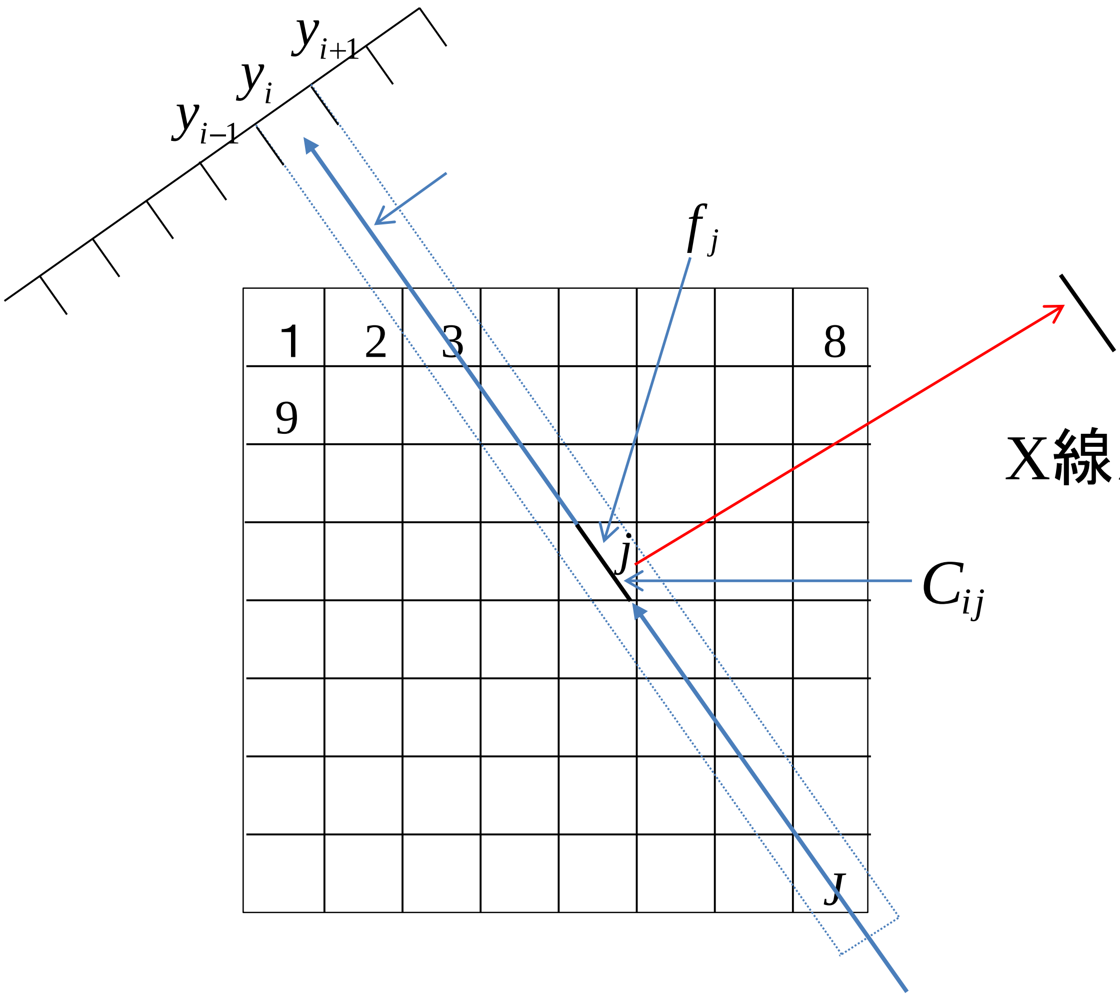
(b) サブセット 4



(c) サブセット 8



係数行列 C



検出確率 C_{ij} : i 番目のX線が画素 j を通過する長さ(l_{ij})

投影の計測過程を詳細にモデル化

ベイズ型画像再構成
　画像に関する事前確率（事前知識）

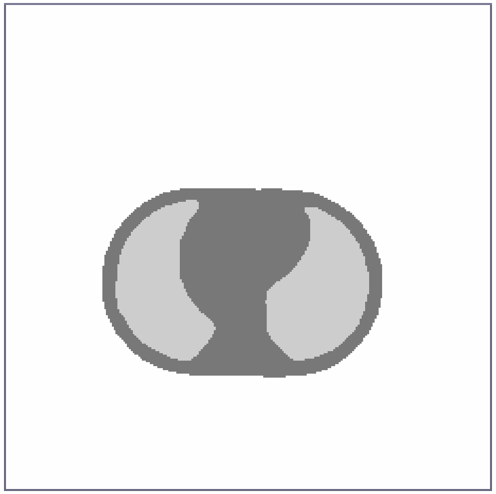
分解能補正
　投影がシステム分解能によってぼける影響

吸収補正
　線減弱係数マップ

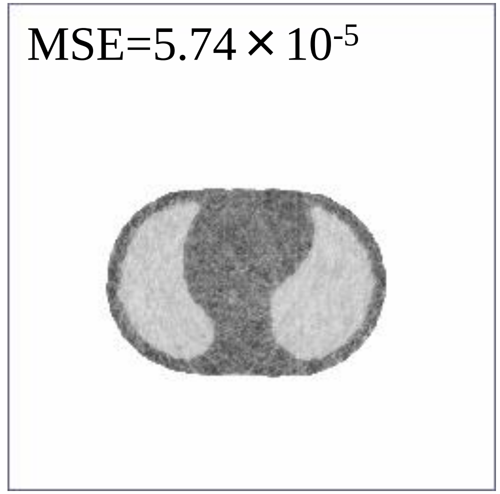
散乱補正
　別に測定（推定）した散乱成分

事前確率を用いたベイズ型画像再構成

(a) Original

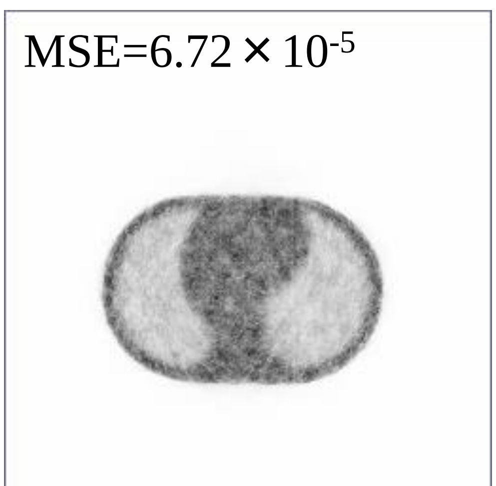


(b) MSRP-OSC

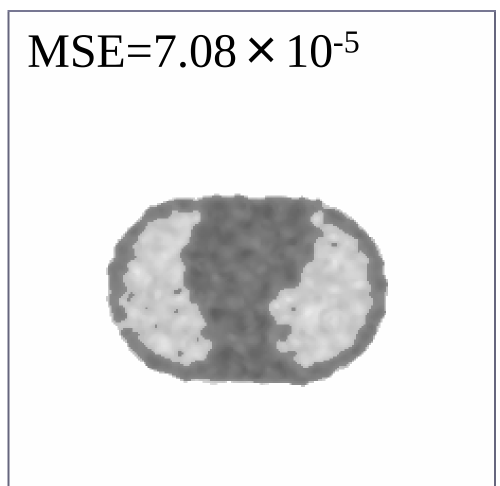


PETの吸収補正用
透過型CT再構成像

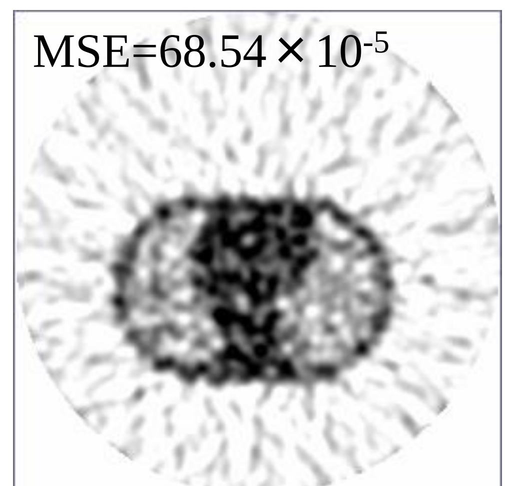
(c) MRP-OSC



(d) SAC



(e) FBP



PETによる放射濃度計測の定量性

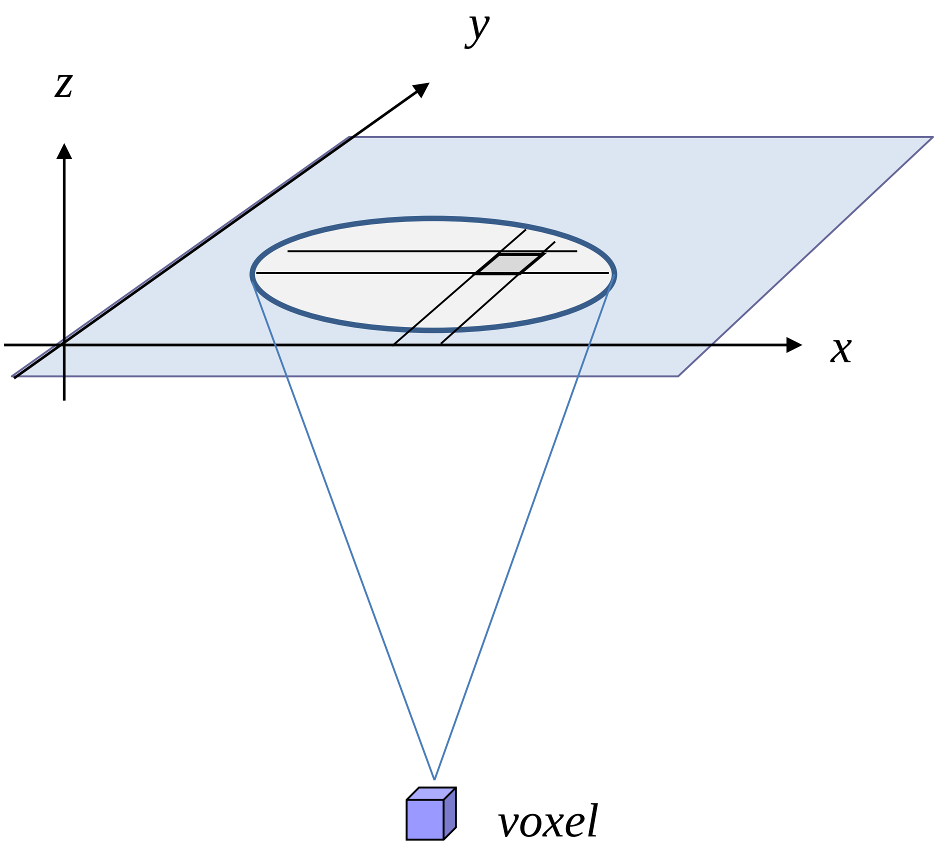
Table 1. Mean and standard deviation (S.D.) calculated from ROI drown on liver of thorax phantom.

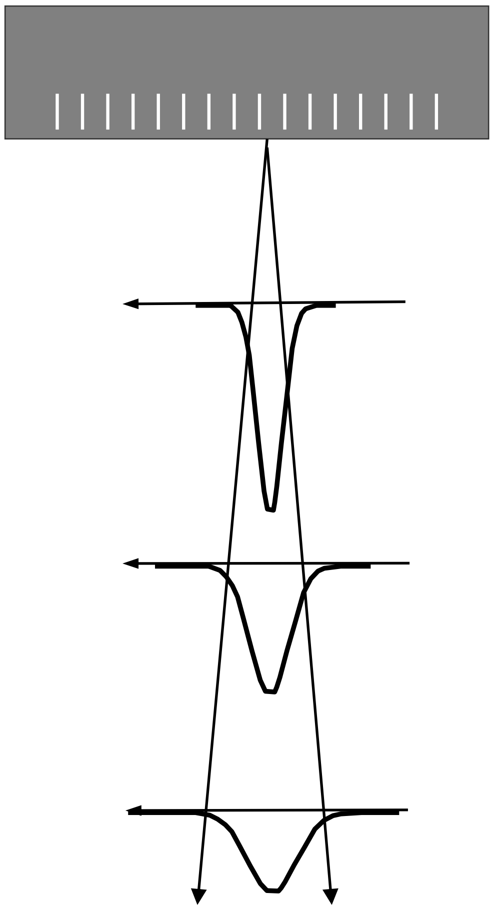
Event collected [million counts]	Processing method	Mean [k Bq/ml]	S.D. [k Bq/ml]
2500	MAC	27.90	0.48
10	MSRP-OSC	27.42	0.96
10	MRP-OSC	26.46	1.44
10	FBP	44.73	11.54
30	FBP+SAC	33.67	1.44

MAC: measured attenuation correction, MSRP-OSC: median and segmented root prior ordered subset convex, MRP-OSC: median root prior ordered subset convex, FBP: filtered back projection, SAC: segmented attenuation correction.

Sakaguchi K, et al. Ann Nucl Med 22: 269-279, 2008

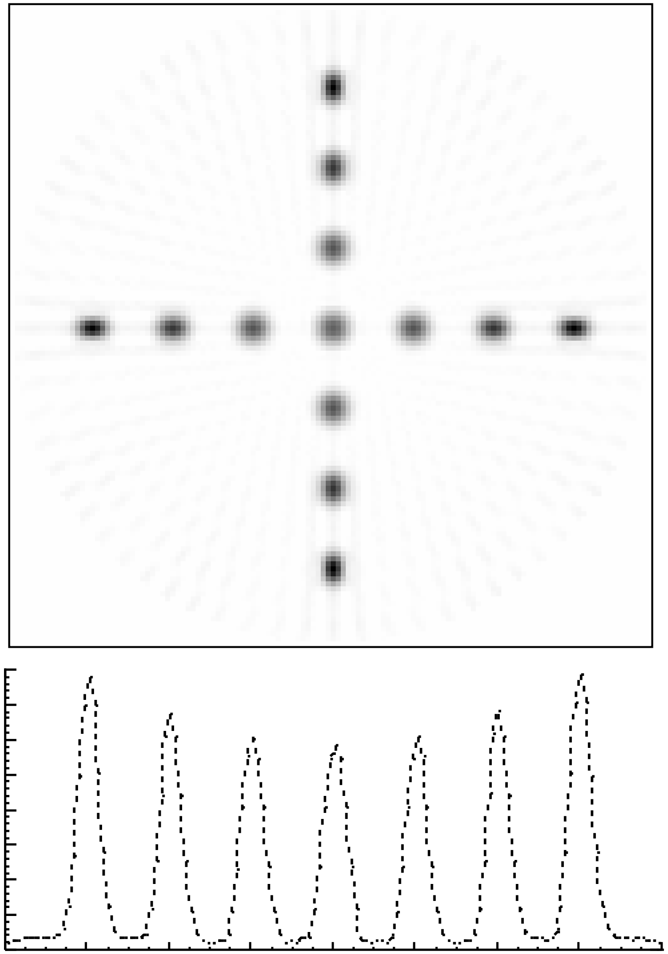
SPECTの分解能補正



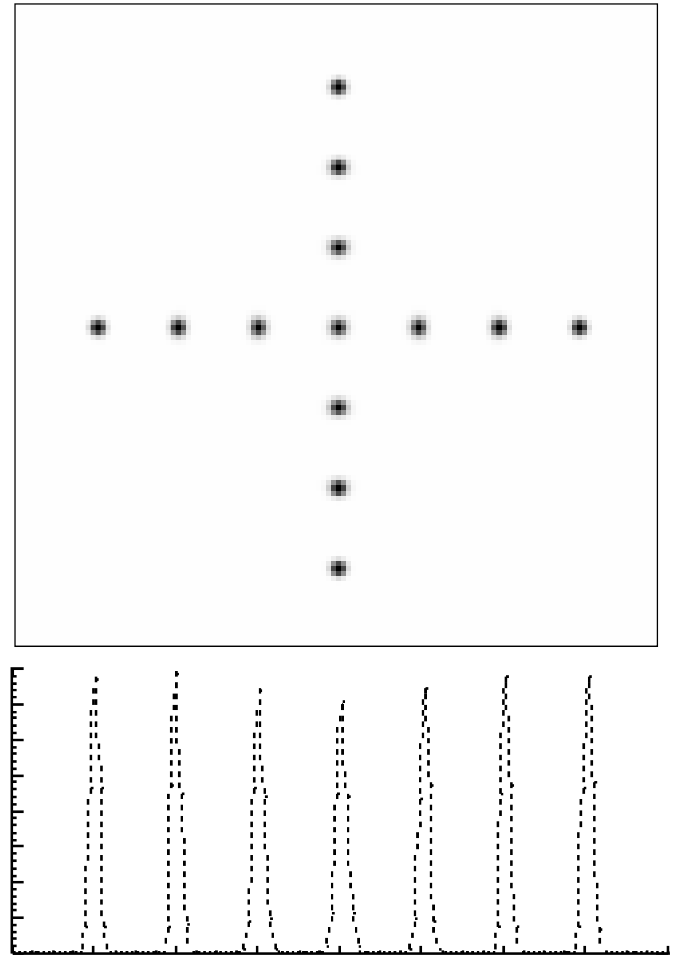


分解能補正 OS-EM

FBP (Ramp)



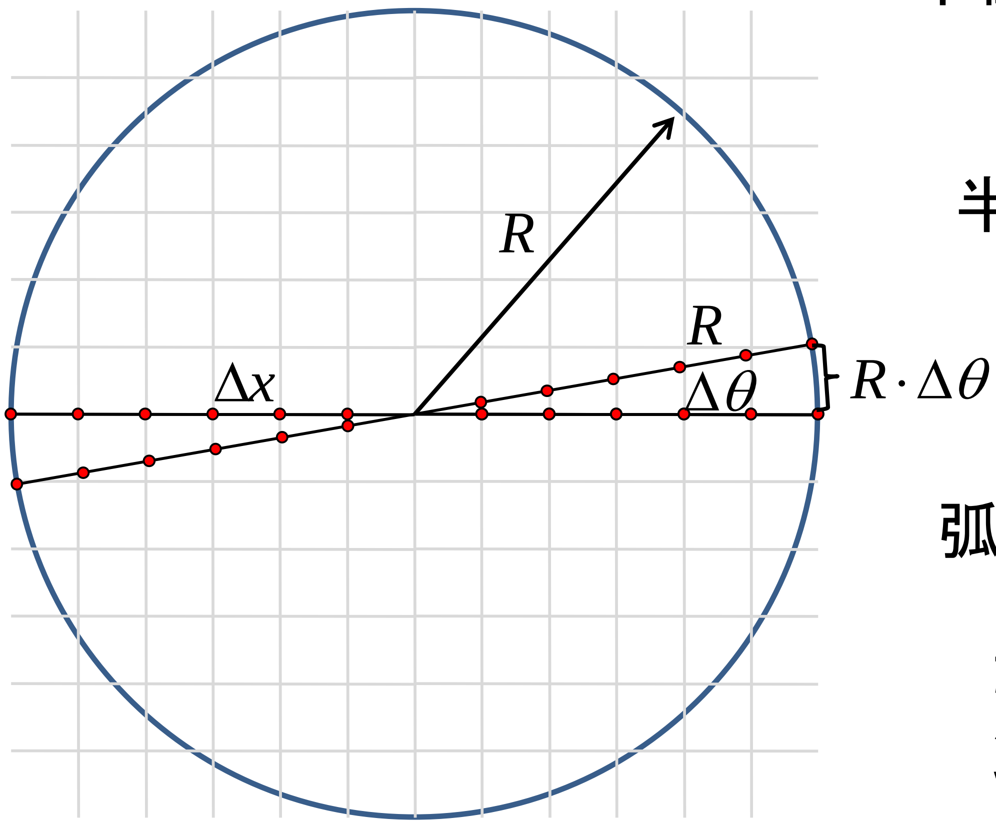
分解能補正OS-EM
(subset = 2, itr = 25)



Yokoi T, et al. Ann Nucl Med 16: 11-18, 2002

5) L_1ノルムと全変動(Total Variation: TV)

標本化定理で必要な投影角度数



半径方向のサンプリング間隔

$$\Delta x = 2R / N$$

半径方向のナイキスト周波数

$$k_n = \frac{1}{2\Delta x}$$

弧の長さ　$R\cdot\Delta\theta = R\dfrac{2\pi}{M}$

弧の長さを半径方向のサンプリング間隔未満にする

$$R\cdot\Delta\theta = R\frac{2\pi}{M} < \frac{1}{2k_n}$$

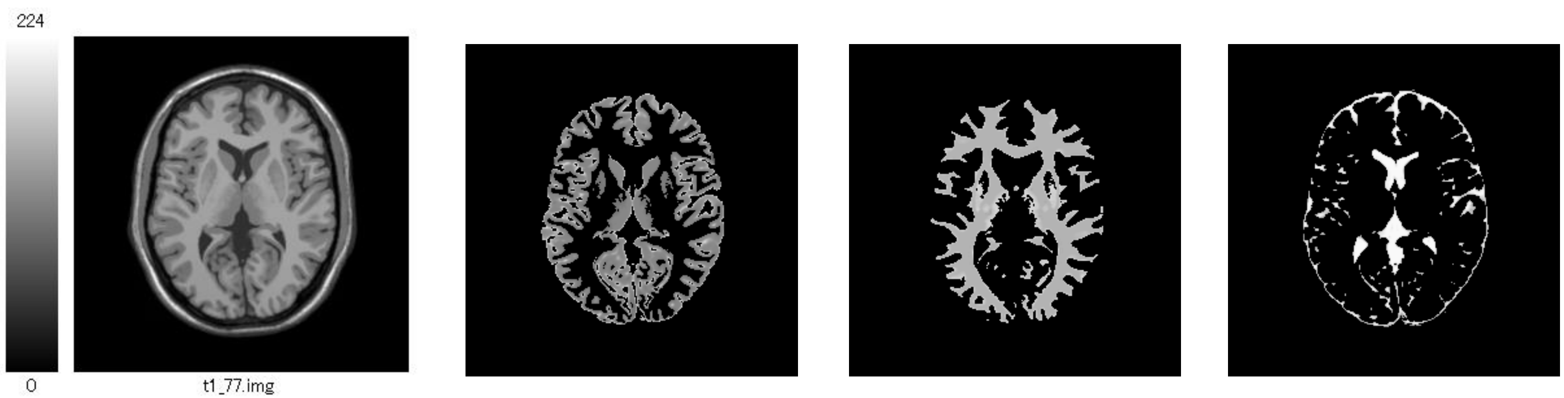
$$M > \pi N$$

事前確率(事前知識)と画像再構成

原画像は有効視野内に限定されそれ以外はゼロ

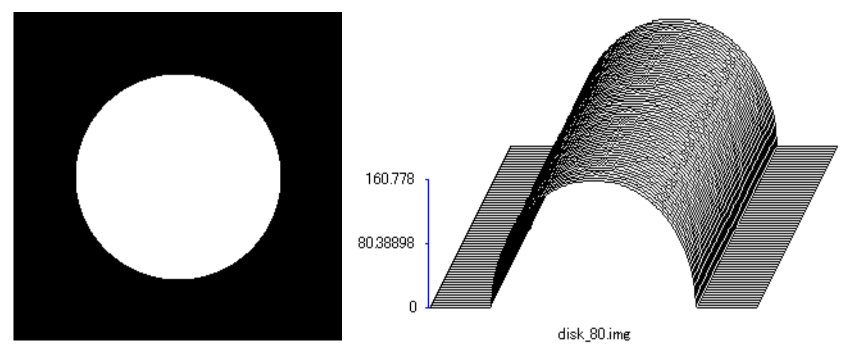
画素間で値は滑らかに変化

いくつかの領域に分けられる



事前知識:原画像は原点に中心があり円内の値は一定

1方向の投影から再構成できる



ベクトルのノルム

1次元ベクトル（数値の集まり）

$$\boldsymbol{a} = (1, 2, 0, 0, 3, 4)^T$$

ベクトルの大きさを測る尺度をノルムと呼ぶ. L_0ノルムはベクトルの成分のうち0でない成分の数を足し算したもの，L_1ノルムは成分の絶対値を足し算したもの，L_2ノルムは成分の二乗を足し算しその平方根をとったものである.

$$L_0 = \|\boldsymbol{a}\|_0 = 4$$ 0でない値の数

$$L_1 = \|\boldsymbol{a}\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |a_i| = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$ 総和

$$L_2 = \|\boldsymbol{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} a_i^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$$ 二乗和の平方根

全変動(Total Variation)を用いた正則化画像再構成

$$\nabla f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

画像の勾配

$$\mathrm{TV} = \iint \left\| \nabla f(x,y) \right\|_1 dx\,dy = \iint \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy$$

$$Q(\boldsymbol{f}) = \left\| C\,\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y} \right\|_2^2 + \beta \left\| TV(\boldsymbol{f}) \right\|_1$$

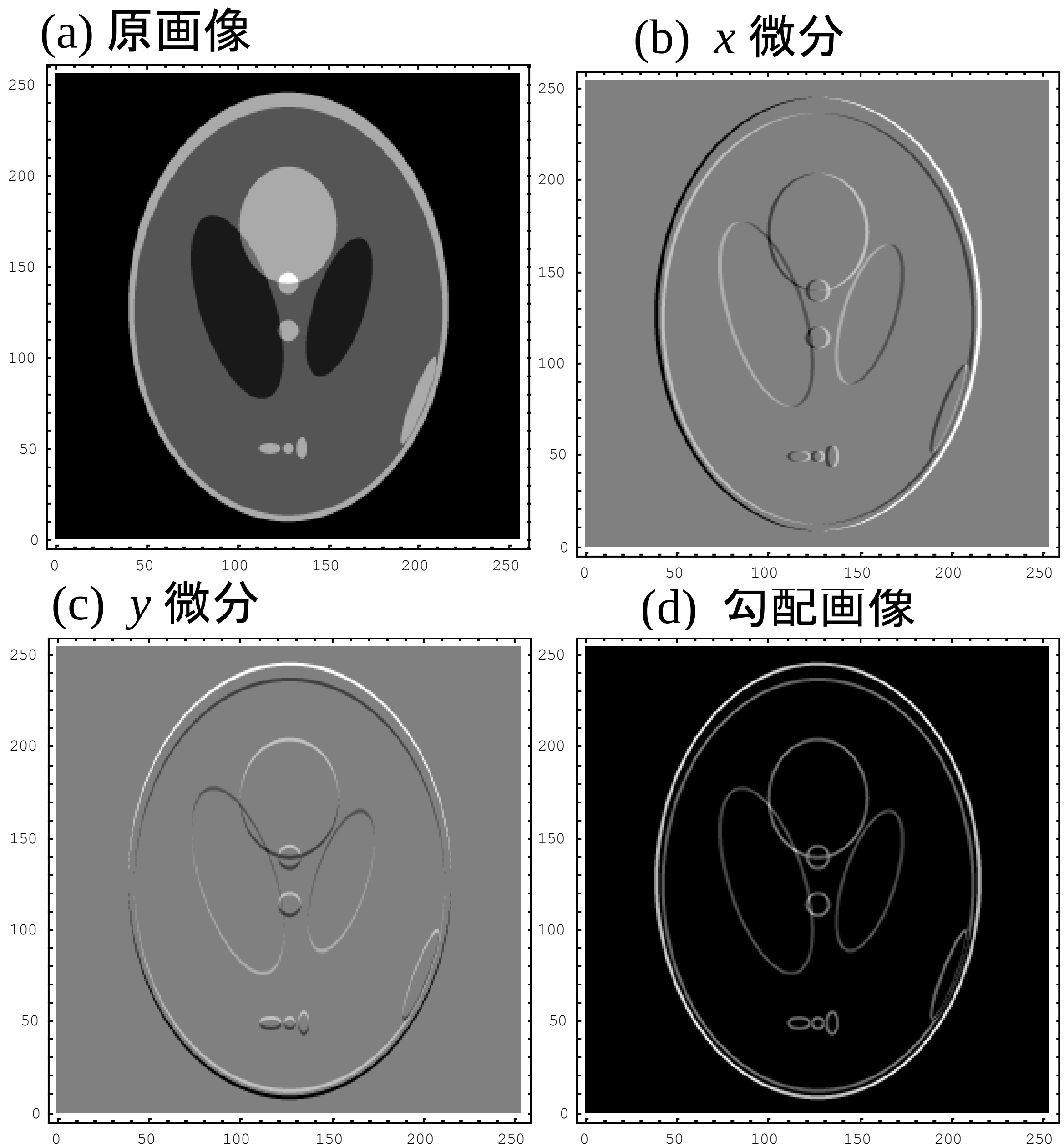
$\boldsymbol{f}$: 原画像, $\boldsymbol{y}$: 投影
$Q(\boldsymbol{f})$: 評価関数

係数行列（システム行列，投影行列）

$$\left\| \nabla f_{TV} \right\|_1 = \sum_{i,j} \left| \nabla f_{i,j} \right| = \sum_{i,j} \sqrt{(f_{i,j} - f_{i-1,j})^2 + (f_{i,j} - f_{i,j-1})^2}$$

TV

勾配画像



勾配画像は原画像に比べ画素の値が0の多いスパース（疎）な画像

↓

L_1ノルムが小さい

↓

TV が小さい

↓

雑音の抑制とエッジの保存

6) 圧縮センシングによる画像再構成

圧縮センシングによる画像再構成

$$Q(\boldsymbol{f}) = \left\| C\,\boldsymbol{f} - \boldsymbol{y} \right\|_2^2 + \beta \left\| TV(\boldsymbol{f}) \right\|_1$$

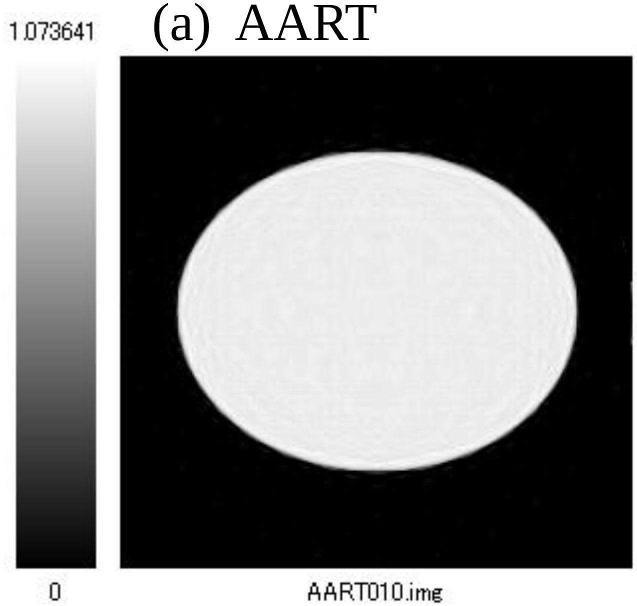
代数的方法（AART法）

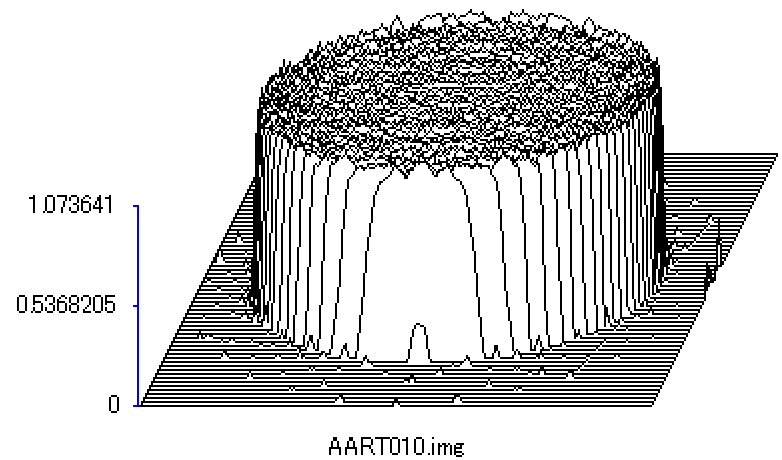
$$f_j^{k+1} = f_j^k + \frac{(y_i - \sum_j C_{ij} f_j^k) C_{ij}}{\sum_j C_{ij} C_{ij}}$$

原画像が256×256 画素で1投影角度あたりの投影を256収集する場合には，標本化定理から角度サンプリングは360°について402必要．TVを正則化に用いると，これよりも少ない投影角度数から画像再構成できる．

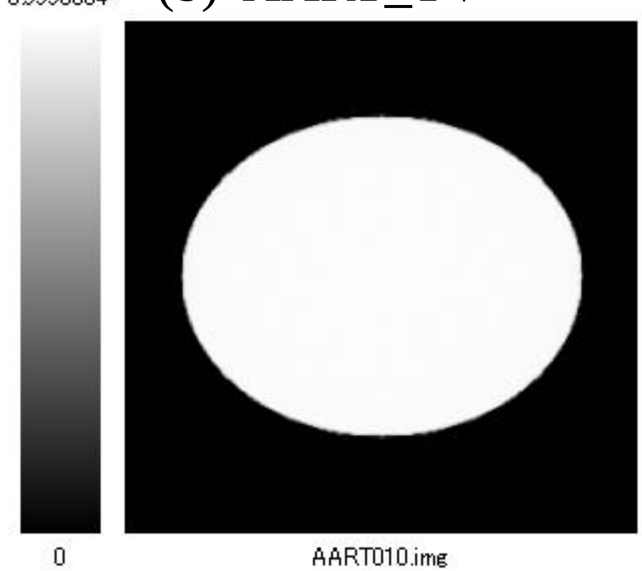
投影角度数16/ 180度からの再構成像

(a) AART

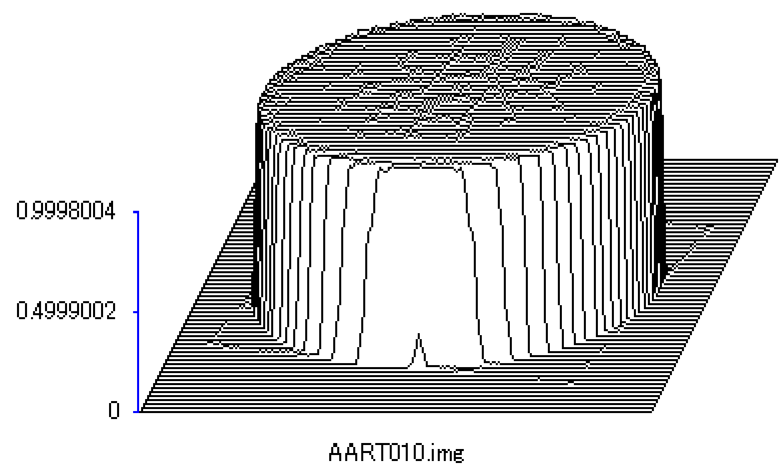




(b) AART_TV

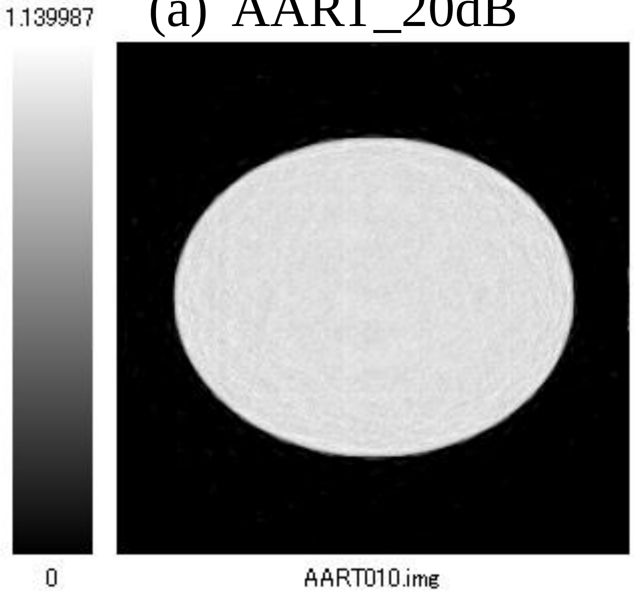


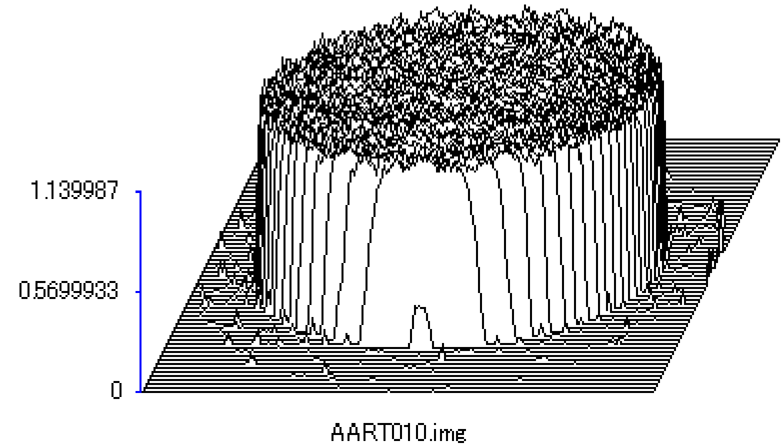
(d)



投影角度数16/ 180度からの再構成像

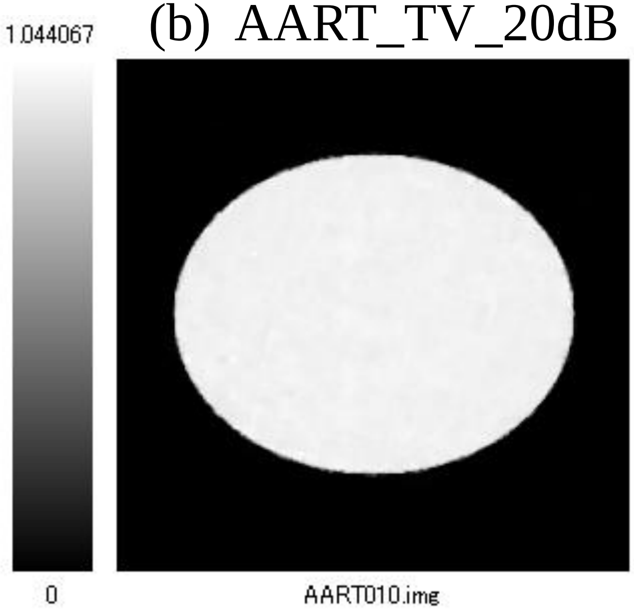
(a) AART_20dB

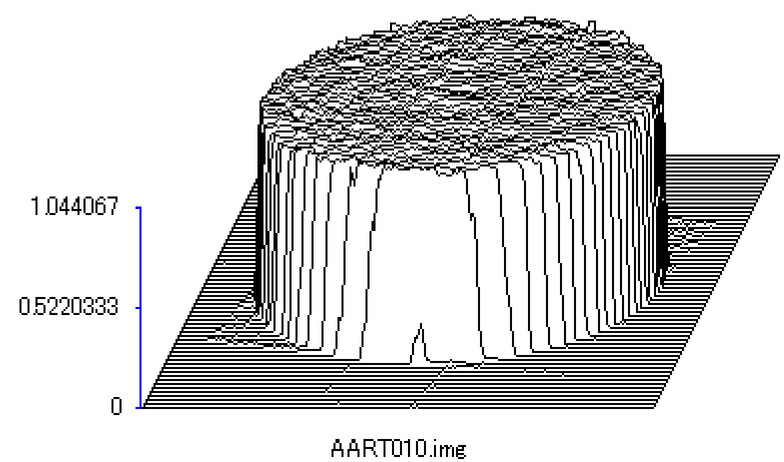




20 dB：投影の平均値の約1%に相当するガウス雑音

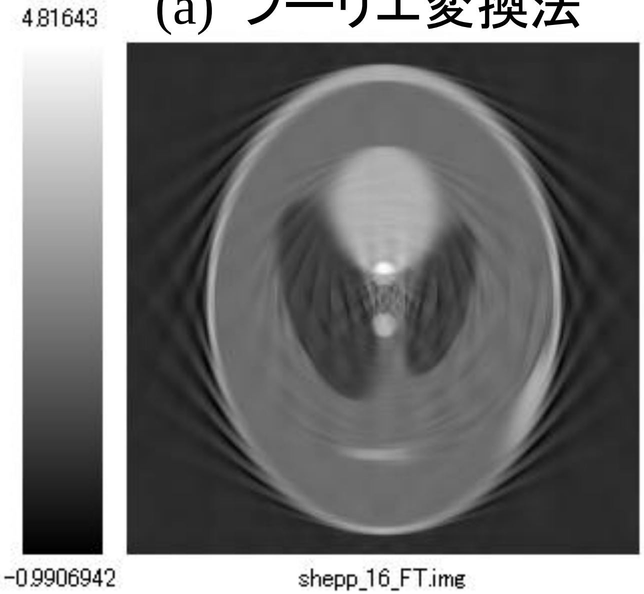
(b) AART_TV_20dB



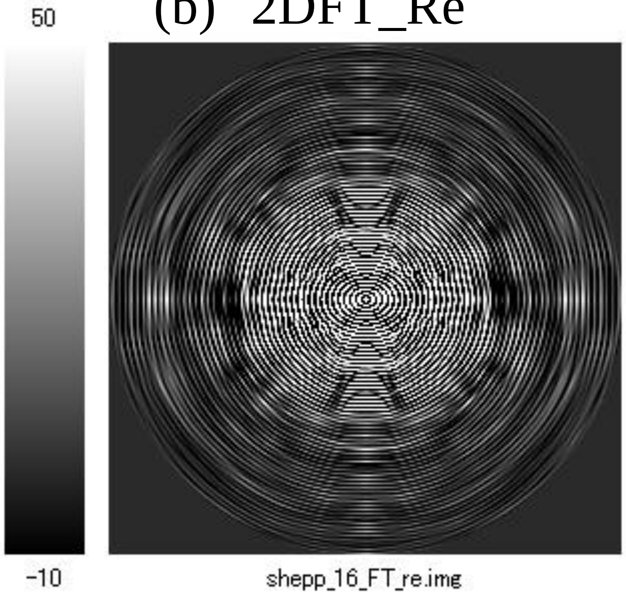


投影角度数16/ 180度からの再構成像

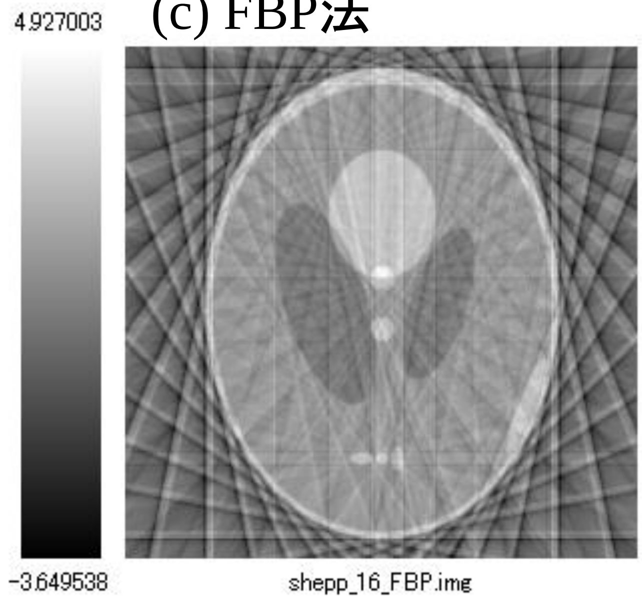
(a) フーリエ変換法



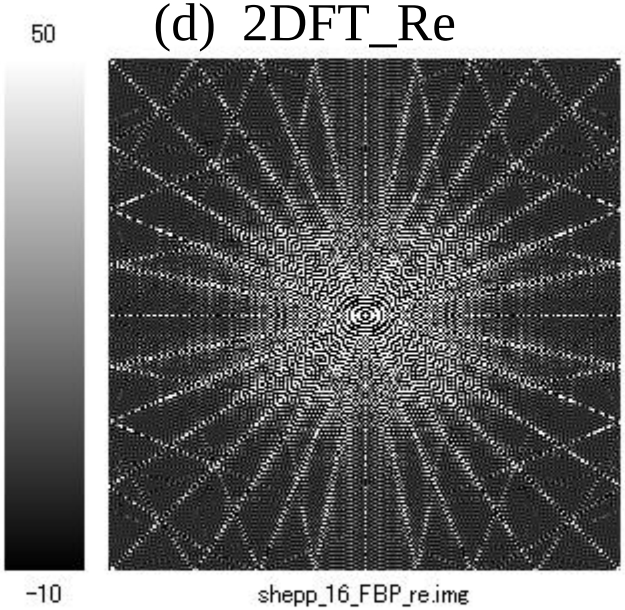
(b) 2DFT_Re



(c) FBP法

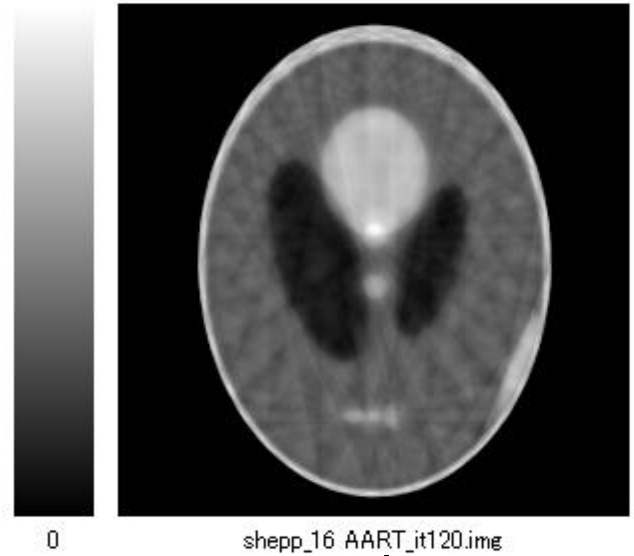


(d) 2DFT_Re

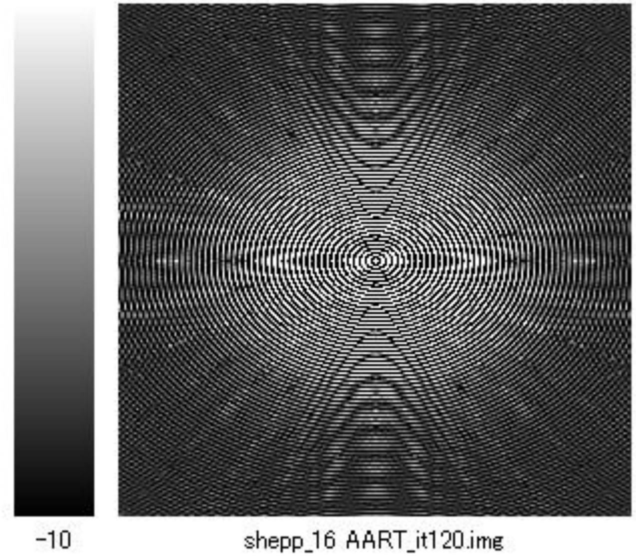


投影角度数16/ 180度からの再構成像

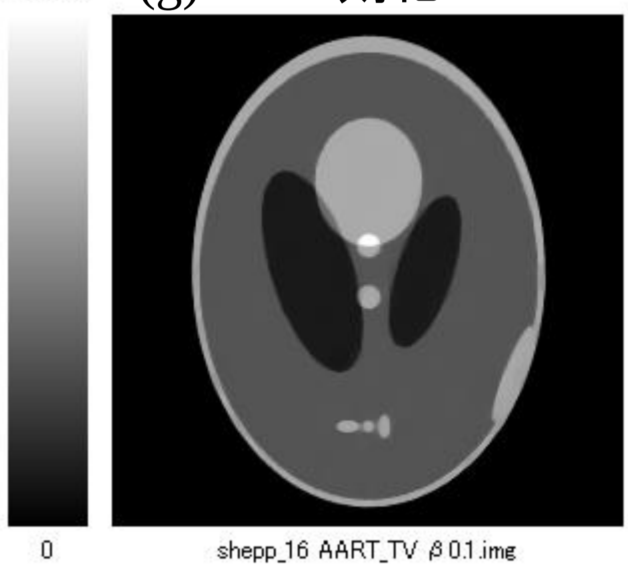
(e) AART法



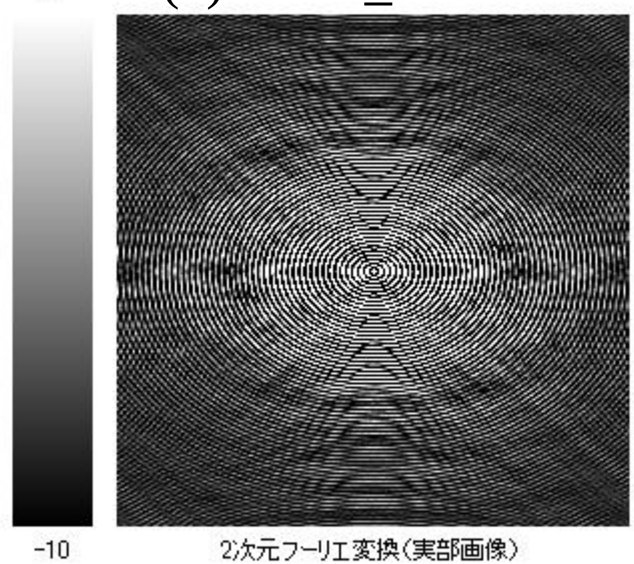
(f) 2DFT_Re



(g) TV正則化

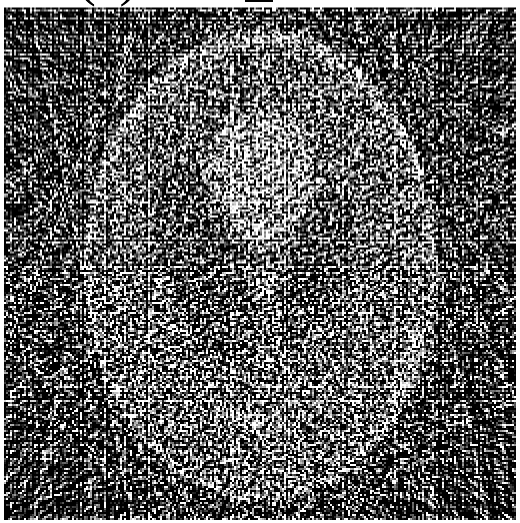


(h) 2DFT_Re

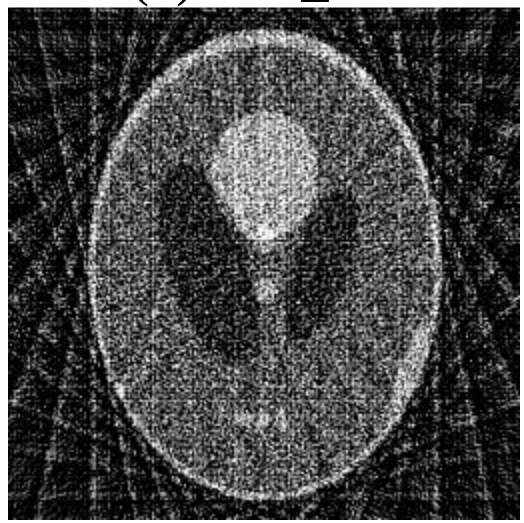


投影角度数16/ 180度からの再構成像

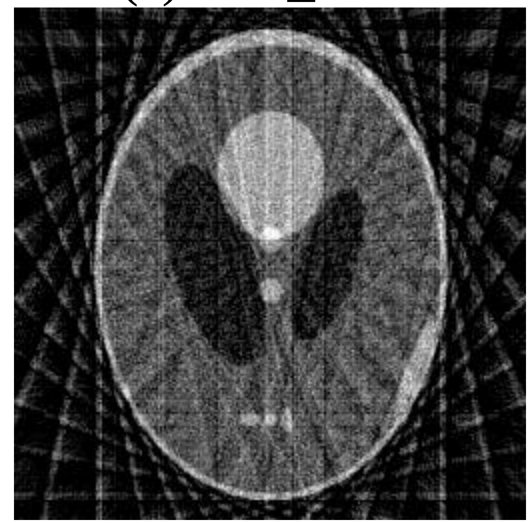
(a) FBP_20dB



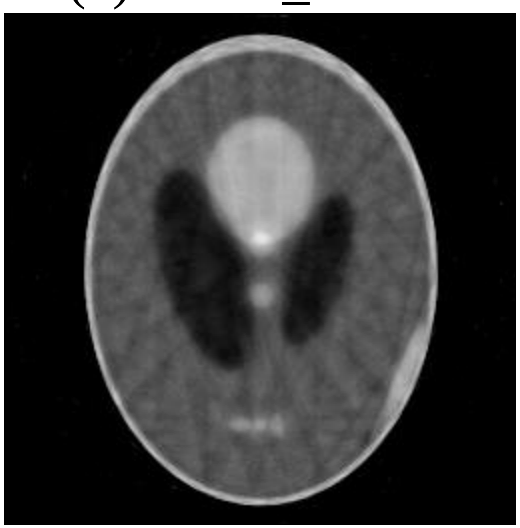
(b) FBP_30dB



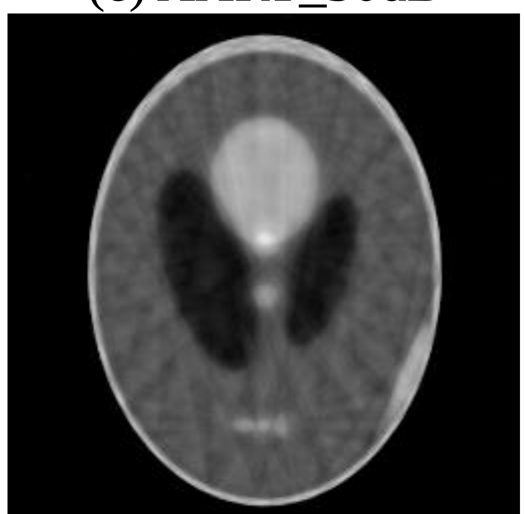
(c) FBP_40dB



(d) AART_20dB



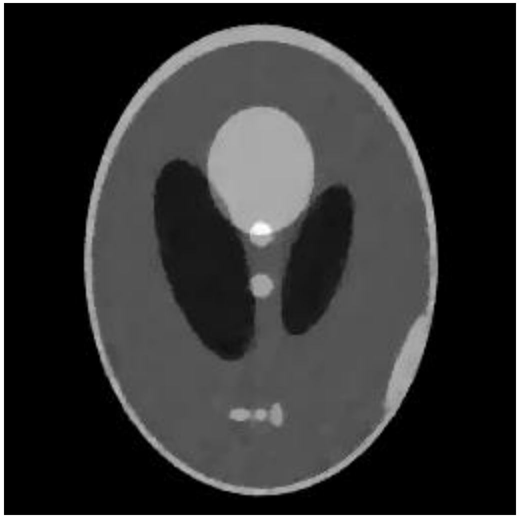
(e) AART_30dB



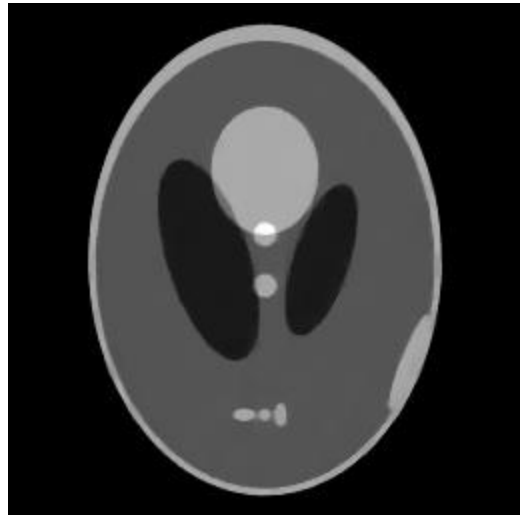
(f) AART_40dB

圧縮センシングによる再構成像

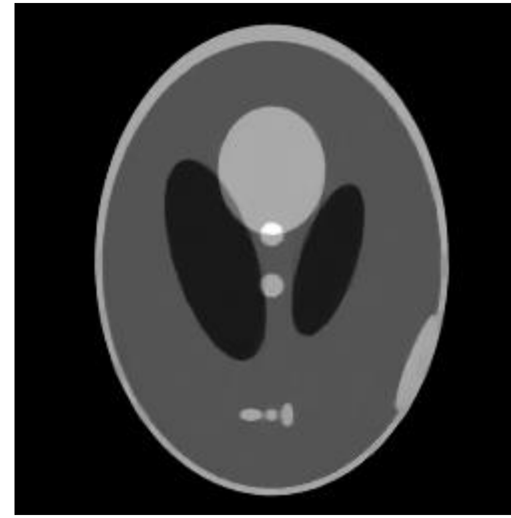
(c) AART_TV_20dB



(d) AART_TV_30dB



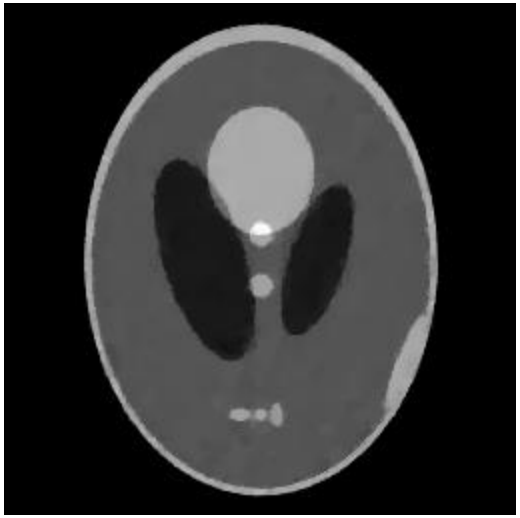
(e) AART_TV_40dB



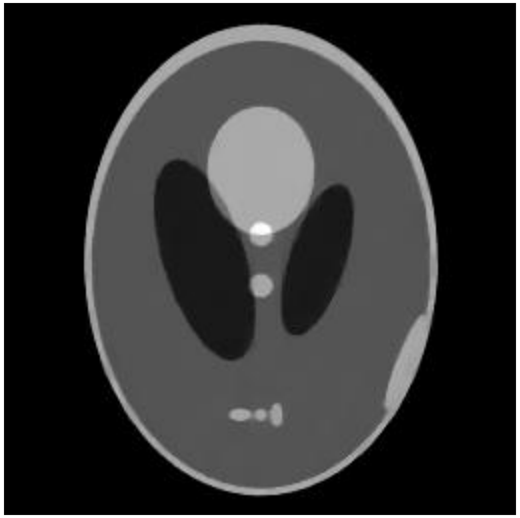
20 dBは投影の平均値の約1%，30 dBは約
0.1%， 40 dBは約0.01%の雑音レベル．

圧縮センシングによる再構成像

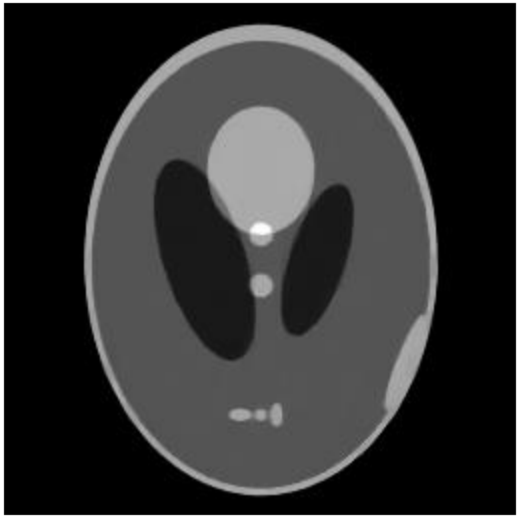
(c) AART_TV_20dB



(d) AART_TV_30dB



(e) AART_TV_40dB



投影角度数16/ 180度からの再構成像
20 dBは投影の平均値の約1%，30 dBは約0.1%，40 dBは約0.01%の雑音レベル．

圧縮センシングによる少数投影からの画像再構成

圧縮センシングによる画像再構成のキーポイントは，原画像がスパース画像に変換可能なことである．この変換には全変動（Total Variation：TV）の他，ウエーブレット変換などが用いられている．

謝辞

逐次近似法の基礎と圧縮センシングによる少数投影からの画像再構成について，講演の機会を与えていただいた，画像情報研究会代表世話人　島根大学医学部放射線医学講座　内田幸司先生はじめ，画像情報研究会の皆様に厚くお礼申し上げます．

データ作成の一部は文部科学省科学研究費補助金基盤研究（C）（課題番号 26461832）の援助を受けて行われた．